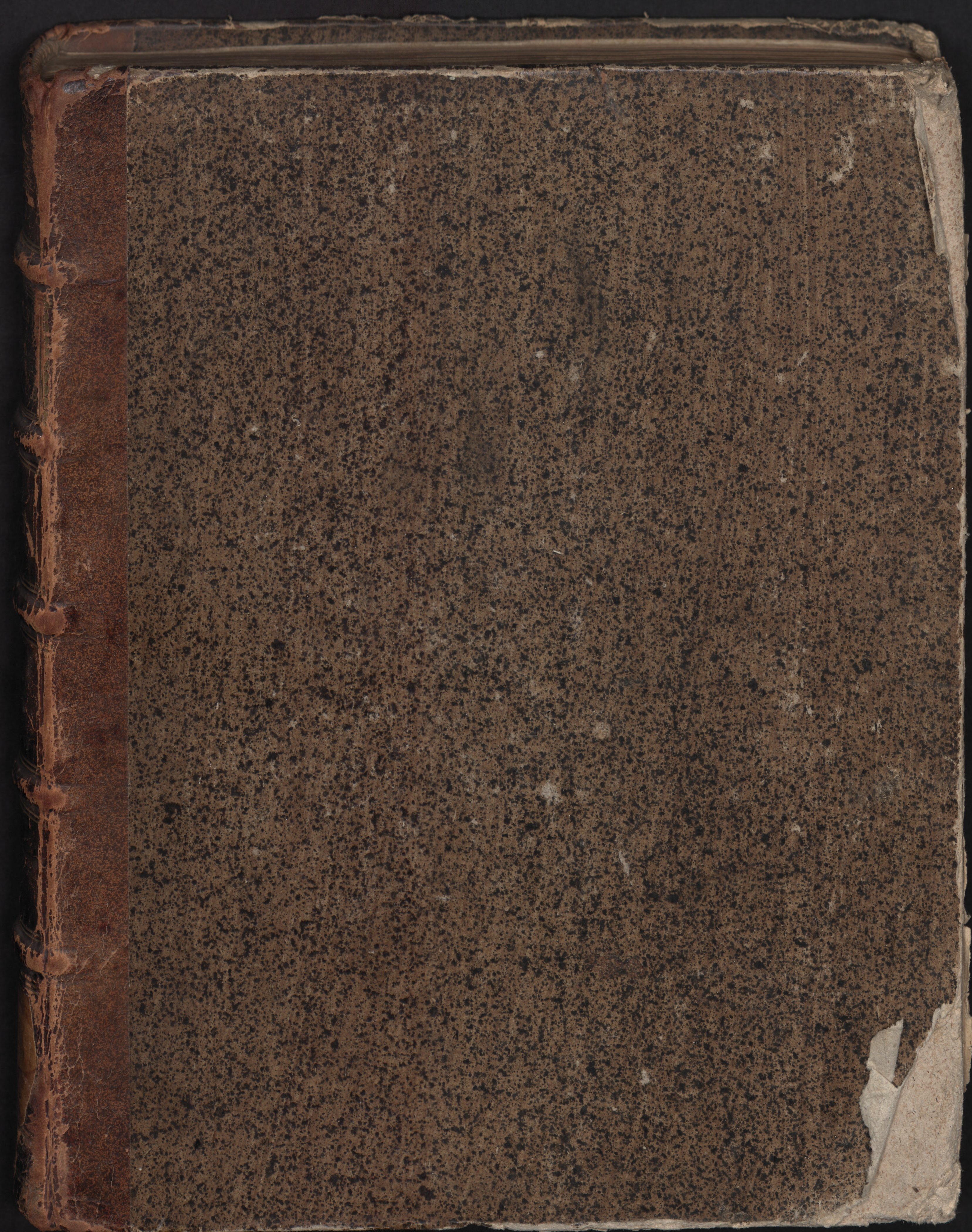


HUGENI
OPERA
RELIQUA

VOL. I



vol II = Opuscula posthuma

vide praefationem pagina 7.

CHRISTIANI HUGENII

ZUILICHEMI

Dum viveret. Zelhemii Toparchæ.

OPERA

RELIQUA.

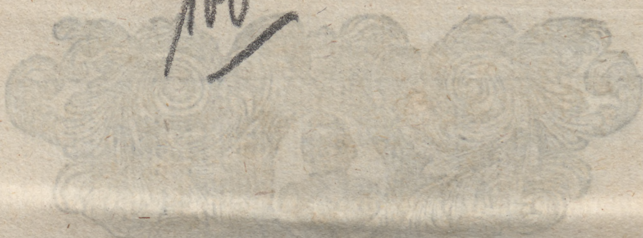
TOMUS PRIMUS.



AMSTELODAMI,

Apud JANSSONIO-WAESBERGIOS.

M. D. CC. XXVIII.


140


POLITECHNIKA GDAŃSKA

G. J. 's GRAVESANDE
L. S.


Uibus summos inter Mathematicos nomen acquisivit CHRISTIANUS HUGENIUS scripta laudare inutile duco. Inter hæc minora multa sunt ab auctore separatim edita; dissertationesque peculiares in diariis litterariis, aut Mathematicis Collectionibus, disperguntur.

Hæc omnia a me collecta, & ordine disposita, ante quatuor annos Leidæ fuere edita; sed duobus tunc temporis datis voluminibus non omnia auctoris Opera continentur; deficiunt ut in præfatione monui tractatus duo, de Lumine uno, de Gravitate altero, ut & volumen Operum Posthumorum.

Hæc autem omnia, quæ in Leidensi editione deficiunt, cum de novo typis mandare vellent Bibliopolæ Amstelodamenses *Waesbergii*, ad quos hujus faciendi jus pervenerat, me rogarunt ut & hisce scriptis operam meam non denegarem, quod, ut tanti viri OPERA OMNIA, eâdem formâ edita, unicum quasi formarent Corpus,

libenter ſuſcepi, quantum enim hoc omnibus Mathematum æſtimatoribus gratum foret ſatis ſuperque noveram.

Duobus ergo voluminibus, anno MDCCXXIV. Leidæ apud *Janſonios vander Aa* editis, duo nova adjiciuntur, quorum ultimum, quod Opera continet Poſthuma, in duos tomos ſubdividitur.

In horum autem voluminum primo Tractatus continetur *de Lumine*, & Diſſertatio *de Gravitate*, quæ ambo ſcripta gallice dedit auctor, quamvis primum ut ipſe in hujus præfatione monet, in linguam latinam vertere ſibi propoſuerat.

Ut autem opera omnia latinè ederentur, tractatus hos ambos in hanc linguam verti curarunt Bibliopolæ, quod cum minùs exactè præſtitum fuiſſet, vir Cl. qui nunc, in Academia Friſia Profeſſor, Philoſophiam ſumma cum laude docet, & qui alia noſtri auctoris opera quæ belgicè aut gallicè conſcripta, cum reliquis Leidæ jam ſunt edita, latinitate donaverat, ut eo tempore monui, hanc etiam verſionem cum gallicis auctoris verbis contulit, & juxta auctoris mentem emendavit.

Ad calcem dissertationis de *Gravitate* addidit auctor Theoremata quindecim de *Logisticæ*, aut *Logarithmicæ* lineæ proprietatibus, sed nullâ adjecta horum demonstratione.

Defectum supplevit Mathematicus subtilissimus Guido Grandus in tractatu Florentiæ MDCCI edito, & ne quid lector circa theoremata desiderandum haberet, Grandi demonstrationes Hugenii scriptis addidimus eoque lubentius, quod non tantum singula, de quibus hic agitur, Theoremata demonstrationibus diversis illustrentur, sed & auctor occasione horum multa alia Geometrica, maximis laudis dignissima, tradit. Unicum hoc desiderassem, quod primam decimi quarti Theorematis demonstrationem * praetermisisset, quæ difficultate non caret, dum ipsum Theorema sequentibus demonstrationibus plenissimè illustretur.

* vide pag. 264.

Non tamen pulcherrimo huic operi hac de causa quid detractum velim, sed ea mente hæc observo, qua Grandus ipse summorum Mathematicorum quorundam errorem, in quem in loco de quo agitur ipse incidit, notavit †.

† vide pag. 272.

In hac prima Theor. 14. demonstratione seriem adhibet GRANDUS hanc, $\frac{ddb}{a}$, $\frac{3ddb}{aa}$, $\frac{5ddb}{a^3}$, $\frac{7ddb}{a^5}$ &c, in qua cum unitate infinite parum differt *a*, qua de causa pro *a* ipsa unitas usurpatur, & ponuntur æquales *a*, *aa*, a^3, a^5 &c, quod certe sine errore fieri potest, quamdiu *a* ad potestatem finitam elevatur; sed de potestate infinita agitur; quare differentia inter *a* & 1. negligi non debet; quod si fiat, omnes ordinatæ Logisticæ fiunt æquales, & hæc mutatur in rectam ipsi asymtoto parallelam.

Dum suam prosequitur demonstrationem Grandus lineas considerat libræ applicatas, quas simul superficiem formare ponit, ita ut singulis latitudinem, quamvis infinitè exiguam, tribuat, ad quam cum in demonstratione non attendat, dum superficies infinitè exiguas longitudinibus proportionales ponit, singulis eandem tribuit latitudinem, quod, propter inæquales inter puncta quibus lineæ applicantur distantias, fieri non potest, & hoc ipsum merito in aliorum demonstrationibus culpavit.

Error secundus primum correxit, & ad veram con-

conclusionem conduxit. Aliquid autem in hac demonstratione deesse satis monet ipse auctor dum ad aliam transit in qua, ut ipse loquitur, majorem *rigorem* observavit.

Transeo nunc ad *Opera Posthuma* de quibus pauca tantum monenda habeo. In omnibus secutus sum editionem quæ jam anno MDCC. ut superius monui publici juris facta fuit; & cujus curam habuere viri celeberrimi BURCHERUS DE VOLTER & BERNHARDUS FULLENIUS, primus in Academia Batava, secundus in Academia Frisia Professor, qui magno labore hæc auctoris scripta, nondum ad prælum parata, in ordinem reduxere. Unicum hoc mutavi, *Dioptricæ* figuræ ære incisæ in presenti editione sunt, & rejeci tabulas ligno incisas, quæ in prima editione usu venerant, quia, ut viri laudati in sua præfatione monent, non qualem desiderarent artificem invenire potuere.

Ad Calcem tractatus de Horologio oscillatorio Theoremata, demonstrationibus destituta, de Vi centrifuga proposuerat auctor. Hæc nunc in hisce operibus posthumis demonstrantur; & quia

ipſe auctor Theoremata in tractatu peculiari demonſtravit, ideo ad calcem ipſius tractatus de Horologio oſcillatorio non alias demonſtrationes adjeci, ut circa theoremata de Logiſtica factum, quorum Hugenii demonſtrationes nullibi extant.

In ſecundo Diario anni MDCLXIX. Pariſiis edito ſinè demonſtrationibus, Propoſuerat HUGENIUS regulas de colliſione corporum. Has reliquis operibus, jam memoratis, ante quadriennium Leidæ editis, non junximus; ratio eſt quod hæ ipſæ in hiſce operibus poſthumis cum demonſtrationibus habentur, in tractatu de *Motu corporum.* De quo tractatu monere debeo auctorem in fine * agere de ordine quodam corporum & ipſum indicare velocitatem ultimi corporis in uno caſu, & omnium motus quantitatem in alio; habetque numeros 14760000000 & 46770000000. quos mutare nolui; quia auctor compendio quodam, quod non explicat ſe ad hos perveniſſe dicit.

* vide pag. 104.

Errorem autem in primo numero dari certum eſt, cùm ſecundum bene ſit determinatum, cujus ſemis eſt primus. Si auctor, qui quatuor primas figuras horum numerorum tantum determi-

minavit decem voluisset determinare, quod potuisset, cum certo-certiùs logarithmicis tabulis usus sit, hos habuisset 2338492188000. & 4676984377000.

Huic editioni illam quam potui, libro in alia urbe prælo commisso, curam dedi; schedæ jam correctæ ad me fuere transmissæ, ipsas legi & cum figuris contuli, quod tamen circa secundam in Tractatu *de Lumine* fuit neglectum quare B. L. rogo ne sequentia menda corrigere recuset *pag.* 13. *lin. pen.* opposito *lege* oppositis. *pag.* 14. *lin.* 20. fixis *lege* fixæ. *pag.* 15. *lin.* 9. bb, dd, & cc *lege bb, dd*, &c. Præterea *pag.* 135. *lin.* 11. ordinatorum *lege* ordinatarum; & *pag.* 239. *lin.* 9. in marg. *lege.* fig. 3.

Negligentia etiam Typothetarum contigit (dum eâdem, ut loquuntur, formâ utuntur, in imprimendis schedis diversis) ut, quæ ad marginem alicujus paginæ indicantur, in sequentibus repetantur, non sine lectoris incommodo cui figura indicatur de qua non agitur.

Quæ potui ad hæc vitanda præstiti, non tamen cum desiderato successu. Remedium autem facile

est, delendo nempe quæ sequuntur. In Tractatu *de Lumine pag.* 16. *dele* Tab. i. fig. 7. *pag.* 57. *del.* Tab. iv. fig. 3. *pag.* 75. *del.* Tab. vi. fig. i. *pag.* 83. *del.* Tab. vi. fig. 6. *Grandi Demons. pag.* 172. *del.* Tab. xii. fig. 8. *pag.* 216. *del.* Tab. xiv. fig. 4.

Dabam Leidæ quinto Nonas Aprilis MDCCXXVIII.



CHRIS-

CHRISTIANI HUGENII TRACTATUS DE LUMINE.

** 3

PRÆFATIO.

Tractatum hunc jam a duodecim annis, dum in Gallia versabar, conscripsi; illumque anno 1678. cum viris eruditis, eo tempore Academiæ Regiæ scientiarum sociis, quibus & ipse jussu Regis adscriptus eram, communicavi: Horum plurimi, qui adhuc in vivis sunt, recordare poterunt, se eo tempore cum hunc ipsum prælegebam, adfuisse; quod faciliùs illi in memoriam revocabunt, qui scientiis Mathematicis animum applicarunt; inter quos nunc tantùm nominare possum Celebres viros Cassinum, Romerum, & de la Hire. Et quamvis postea plurima correxerim imò mutaverim, exemplaria, eo tempore excerpta, fidem facient, me attamen nihil addidisse præter conjecturas circa formationem crystalli Islandici, & novam annotationem in refractionem crystalli rupis.

Hæc memorare necessarium duxi ut constaret a quonam jam tempore, hæcce quæ nunc edo, meditatus fuerim, non verò, ut illis debitum honorem detraherem, qui eadem, tractare etiam potuerunt, licèt eorum nihil quæ scripseram viderint, quemadmodum verè accidit duobus egregiis Geometris Newtono & Leibnizio respectu problematis de figura vitrorum ad colligendos radios, ubi data est una ex superficiebus.

Hoc quæri poterit, cur tamdiu distulerim hæc in publicum edere, ratio est quod libellum hunc satis negligenter linguâ gallicâ conscripseram, eo animo ut in latinam verterem, hoc ita agens ut ad res ipsas meliùs attenderem. Postea in animum induxi ipsum unà emittere cum alio tractatu dioptrico, in quo effectus teliscopiorum, & omnia quæ ad hanc scientiam pertinent, explico, sed voluptate cessante, ex novis detectis sumendâ, distuli propositum hoc exequi, & nescio quonam tempore id perficere potuissem, quia sæpius distrahor vel negotiis vel novo quodam studii genere. Quod perpendens, tandem præstare judicavi hoc opus, qualecunque est, evulgare, ne diutiùs differendo, tandem perdatur.

Illius generis demonstrationes hìc reperientur, quæ non æque ac geometricæ certæ sunt, & quæ etiam multum ab his differunt, nam Geometræ suas propositiones deducunt ex principiis certis & indubitatis, hìc principia comprobantur per conclusiones quæ inde deducuntur, cum res ipsa hoc aliter fieri non patiatur. Fieri tamen potest ut hoc pacto ad eum verisimilitudinis gradum perveniamus, qui fere ipsi evidentiæ æqualis est, scilicet ubi res, quæ demonstratæ fuerunt per adsumta principia, congruunt perfecte cum phænomenis quæ experientia indicavit; in primis ubi magna illorum datur copia, & adhuc magis ubi nova ex his Hypothesibus deducuntur & prævidentur phænomena, & ubi comperitur effectus nostræ expectationi respondere. Si verò omnia hæc verisimilitudinis argumenta in hocce quod mihi tractare proposui occurrant, ut mihi persuadeo, confirmabitur me optatum in inquisitione successum obtinuisse, & rem ipsam multum cum iis quæ ego dixi differre vix fieri poterit. Credo itaque illos omnes qui rerum causas cognoscere desiderant, & qui mira luminis phænomena admirari norunt aliquam percepturos esse voluptatem ex diversis his speculationibus, quæ ad lumen spectant, ut & ex nova explicatione de insigni hujus proprietate, quæ fundamentum est nostrorum oculorum constructionis, & magnarum illarum inventionum, quæ horum usum insigniter promovent. Spero quoque quosdam fore qui hisce principiis nixi, altiùs inquirent in hanc materiam, quàm ipsemet facere potui, cum multum absit ut illam exhauserim: Hoc patet ex locis quos notavi, ubi difficultates haud solutas relinquo; & adhuc magis ex iis quas intactas reliqui, ut sunt corpora lucida diversarum specierum, & omnia, quæ ad colores spectant, in quibus nemo hactenus, se felicem habuisse successum, gloriari potest.

Tandem plura restant inquirenda de natura luminis quàm me ipsum detexisse credo, & multum illi debebo qui ea supplere poterit, quæ in hisce cognitioni meæ deficiunt.

Hagæ 8. Jan. 1690.

TRACTATUS DE LUMINE.

CAPUT PRIMUM.

De Radiis directis.

QUæ ad Opticen pertinent demonstrationes, ut fit in omnibus disciplinis in quibus Geometria ad corpus applicatur, nituntur axiomatibus ex experientia depromptis, qualia sunt: Radios luminis rectâ lineâ pergere, angulos reflexionis & incidentiæ æquales esse, in Refractionibus radium rumpi juxta regulam sinuum nunc celebratam adeo, & haud minus certam quam præcedentes.

Plerisque, qui de variis Optices partibus scripsere, satis fuit visum hæc axiomata præsupponere, sed viri quidam diligentiores eorum originem causasque indagare operæ pretium duxerunt, quippe qui ea ipsa existimarent esse mira naturæ opera. In quibus cùm ingeniosa quidem protulerint, sed non tamen talia, quin eruditiores desiderent explicationes quæ satisfaciant magis. Lubet mihi in medium afferre ea quæ hac de re meditatus sum, ut pro virili hujus partis scientiæ naturalis illustrationem adjuvem, quæ non immerito fertur esse difficillima. Agnosco multum me debere illis, qui primi inceperunt densas, quibus hæ res involutæ erant, tenebras discutere, spémque dederunt fore, ut explicari possent per causas intellectu faciles. Verùm & ab altera parte miror, quo pacto iidem sæpe Ratiocinia parùm clara pro certissimis & demonstrativis venditârint; imo huc usque fuit nemo qui, meo qui-

dem judicio, probabiliter explicuerit prima ista & insignia luminis Phænomena, scilicet cur lumen rectâ duntaxat lineâ progrediatur & quî possit fieri, ut radii optici variis è partibus profecti sese variis modis secent, nec sibi officiant mutuo.

Conabor itaque in hoc opere, juxta placita in Philosophiâ hodie recepta, rationes adducere clariores & verò magis similes, primò proprietatum luminis rectâ lineâ progressi, dein ejusdem reflexi à corporibus obviis; quo facto aggrediar docere Symptomata radiorum eorum qui dicuntur refringi, cum permeant corpora diaphana diversæ speciei: ibique agam de effectis Refractionis aëris ex diversis Atmosphæræ densitatibus.

Pergam deinde ad examen causarum miræ illius Refractionis cujusdam Crystalli quæ huc ex Islandia advehitur; ultimò denique loco agam de variis corporum pellucidorum & reflectentium figuris, quarum vi luminis radii aut in unum punctum colliguntur aut variis modis dissipantur: Ibique patebit quam facile inveniantur, ex Theoria nostra nova, non modo Ellipses, Hyperbolæ, cæteræque lineæ curvæ quas Cartesius subtilissime ad illum effectum excogitavit; at eæ ipsæ quoque quibus constare oportet superficies altera vitri, ubi prior data est aut Sphærica, aut plana, aut cujuslibet figuræ.

Nemini dubium esse potest quin lumen constet ex motu certæ cujusdam materiæ. Sive enim quo pacto producatur spectes, produci hîc in terra observatur ab igne in primis & flammâ quibus profecto insunt corpora quædam rapido motu abrepta, cum dissolvant & fundant corpora solidissima. Sive effecta ejus respicias, apparet, quod lumen, quando collectum est, ut speculorum concavorum ope fit, vim habeat, ignis instar urendi, id est, quòd disjungat partes corporum; id quod certissimè motum designat, saltem in verâ Philosophiâ, in qua omnium effectuum naturalium causæ concipiuntur per rationes mechanicas: id quod meo

meo judicio fieri debet, nisi velimus omnem spem abjicere aliquid in Physicis intelligendi.

Cum autem juxta illam Philosophiam pro certo teneamus sensationem illam, quæ *Visio* dicitur, excitari dumtaxat, cum nervi in fundo oculorum à materia quadam agitentur, hoc etiam nos adducit ad credendum, lumen esse motum quendam materiæ lucidum inter corpus nostrosque oculos interjectum.

Inprimis si perpendas quam citissime luminis radii undequaque diffundantur, & quomodo è variis imò ex oppositis partibus profecti sese intersecent nec sibi officiant mutuo, facilè comperias corpora lucida non videri ope cujusdam materiæ quæ ab ipsis ad nos perveniat, quemadmodum globus vel sagitta per aërem transit; hoc enim certissimè contrariatur duabus hisce, præsertim posteriori, luminis proprietatibus; Aliâ itaque ratione promovetur, quàm ut intelligamus, novisse juvabit, quo pacto sonus per aërem progrediatur.

Novimus sonum ope aëris qui est corpus, quod nec videri nec tangi potest, diffundi circa locum ubi natus est, motu quodam qui successive ab una parte aëris ad alteram pergit; motumque illum fieri undique eâdem velocitate; adeo ut debeant efformari quasi quædam superficies Sphæræ quæ continuo latiores fiant, auresque nostras demum feriant. Non autem dubium est, quin lumen etiam à corpore lucido ad nos usque pertingat ope motus impressi materiæ interjectæ, quandoquidem, ut jam vidimus, hoc non potest fieri ope corporis cujusdam quod ab objecto lucido ad nos commearet. Quod si nunc aliquo temporis spacio opus est ut lumen ad nos usque perveniat (quod modo examinandum erit) sequetur motum illum impressum materiæ successivum esse, adeoque illum, ut in sono fit, extendi in quasdam superficies undasque Sphæricas: Undas autem voco à similitudine earum, quas in aqua animadvertas facile, si in eam lapidem mit-

tas; illæ enim (quanquam hoc ex alia causa oritur fitque dumtaxat in superficie plana) talem successivam in orbem expansionem repræsentant.

Ut igitur videamus an Luminis extensio successive fiat, considerandum primo est an experimenta quædam contrarium arguant. Quod attinet ad ea quæ hic in terra fieri possunt ope ignium ad magnas distantias accensorum, quamvis inde pateat lumen tempore haud sensibili transire per hæc spacia, jure tamen ac meritò dici potest, nimis hæc brevia esse; adeoque inde tantum sequi Lumen quam citissime pergere. Cartesius qui motum luminis instantaneum esse existimabat, longè meliori, nec injuriâ, nitebatur experimento quod ex defectibus Lunæ depromebat, quod tamen ut ostendam non convincit; at illud paulo aliter, ac ille, proponam, ut illius consequentiæ omnes intelligantur melius.

TAB. I. Fig. I. Sit A locus Solis, B D pars annuæ orbitæ telluris, A B C linea recta quam suppono occurrere in puncto C orbitæ Lunæ, quæ per circulum C D repræsentatur.

Si jam Lumini opus est tempore aliquo, v. g. horâ unâ, ut permeet spatium quod Terram inter & Lunam patet, sequetur, quòd ubi Terra pervenerit in B, umbra illius sive interruptio Luminis nondum pervenerit ad punctum C nec nisi post integram horam illud attinget. Horâ igitur unâ postquam Terra fuerit in B Luna perveniens tandem ad C ibi obscurabitur, at obscuratio illa aut interruptio luminis tantum post alterius horæ spatium ad terram perveniet, sumamus nunc duabus illis horis illam pervenisse in E. Ubi igitur tellus erit in E videbis Lunam obscuratam in C unde profecta est ante horam unam, eodemque tempore cernes Solem in A. Cum enim Sol immobilis sit, ut suppono cum Copernico, & lumen rectis lineis pergat, Sol videri debet semper ubi est. At observatum est usque, inquiunt, Lunam deficientem videri in illo loco Eclipticæ qui oppositus est Soli, & hìc tamen videretur

retro

retro post locum illum, angulo G E C qui est complementum A E C ad duos angulos rectos. Ergo hoc experientiæ contrarium est, cum Angulus G E C esset maximè sensibilis & triginta trium aut circiter graduum. Namque ex nostra supputatione quam in tractatu de causis phænomenorum Saturni videre est, distantia B A Terram inter & Solem quasi duodecim millia Diametrorum terrestrium complectitur, adeoque quadringentis vicibus major est quam B C, distantia, Lunæ quæ triginta continet diametros. Ergo Angulus E C B erit fere quadringentis vicibus major quam B A E, qui est quinque minutorum; scilicet via quam conficit terra intra duas horas in sua orbita: ac proinde Angulus B C E fere 33. grad. sic & Angulus C E G, qui illum excedit quantitate 5′.

At notandum est velocitatem luminis hoc in ratiocinio positam esse ejusmodi, ut horâ indigeat integrâ, ad spatium hinc ad Lunam usque patens emetiendum. Nunc si fingas minuto tantum uno opus esse, ut lumen viam hanc conficiat, manifestum est tunc Angulum C E G tantum fore trium minutorum; &, si decem secundæ tantum requirantur, Angulum eundem haud sex minutorum fore; cumque ille non facile animadvertatur in observationibus defectuum Lunæ, non licebit inde concludere motum luminis esse instantaneum.

Non diffiteor hic supponi stupendam prorsus velocitatem, quæ nempe centies millies major esset velocitate soni; Sonus enim, ut observavi sæpius 180. hexapedas conficit intra secundam unam, aut, intra singulum arteriæ pulsum. at suppositio illa nemini impossibilis videri debet, cum haud agamus de translatione continua corporis tanta cum velocitate, at de motione quadam successiva, quæ ex uno corpore in alia transit. Non igitur dubitavi, ubi his de rebus meditatus sum, ponere emanationem Luminis indigere tempore, cum viderem, hoc posito, omnia Luminis Phænomena explicari posse, quæ contrariam sequendo

opinionem omnino non comprehenderentur. Etenim mihi aliisque visum est semper ipsum etiam Cartesium, cui propositum erat clarè & nitidè de omnibus Physicæ subjectis disserere, quodque revera melius fecit, quam ante eum quisquam, nihil tamen de lumine ejusque proprietatibus dixisse quod non difficultatibus innumeris intricatum sit, vel & quod possit intelligi.

At quod pro Hypothesi tantum adhibebam, illud ipsum veritatis constantis magnam speciem accepit ab ingeniosa demonstratione Romeri quam hic subjiciam, expectans, ut ipse edat omnia, quæ ad hanc confirmandam faciunt. Illa quemadmodum superior nititur observationibus cœlestibus, probatque, non modo lumen in itinere suo tempus impendere, sed & ostendit quanto tempore opus sit, velocitatemque illius esse sexies majorem ac eam de qua supra dixi.

TAB. I. Fig. 2. Utitur ad id defectibus minorum illorum Planetarum qui Jovem circumeunt, ejusque umbram ingrediuntur sæpius, & sic differit. Sit A Sol B C D E orbita annua telluris, F Jupiter G N orbita proximi Satellitum Jovialium, ille enim majoris usus ad id est quam tres reliqui, quia citius revolvitur. G Satelles ille umbram Jovialem ingrediens, & H idem eâdem umbrâ egressus.

Igitur posito quod, ubi Terra esset in B paulò ante ultimam quadraturam, visus sit idem Satelles umbrâ egredi, oporteret si terra eodem in loco maneret, similem emersionem iterum post 42 ½ horas videri, quia nempe intra hoc tempus orbitam suam peregerat & rursum Soli oppositus est. Quod si Terra in B versaretur semper, dum v. g. Satelles ille trigesies orbem suum peregisset, illud denuo videret umbra egredi post trigesies 42 ½ horas. At cum Terra interea pervenerit in C recesseritque amplius à Jove, sequitur quod, si lumini opus sit tempore aliquo, illuminatio exigui Planetæ serius videnda sit in C quam fuisset in B. Et quod illis trigesies 42 ½ horis, addendum sit, insuper tem-

tempus illud intra quod lumen conficit ſpatium M C, quod eſt differentia ſpatiorum C H, B H. Eodemque modo verſus alteram quadraturam, ubi terra pervenit à D in E & propior Jovi facta eſt, neceſſe eſt immerſiones Satellitis G in umbram prius obſervari in E quam viſæ fuiſſent ſi Terra manſiſſet in D.

Ex multis autem obſervationibus defectuum illorum factis per decennium integrum differentiæ illæ valde notabiles inventæ fuerunt, quippe decem aut amplius minutorum; unde concluſum eſt Lumini opus eſſe circiter 22. minutis, ut peragret Diametrum Orbis annui K L, quæ dupla eſt diſtantiæ terram inter & Solem interjectæ.

Motus Jovis in ſua orbita, dum Tellus tranſit à B in C aut à D in E comprehenditur in illo calculo, probaturque moram illuminationum illarum & anticipationem Eclipſium neque tribui debere irregularitati quæ reperitur in motu illius exigui Planetæ, neque illius excentricitati.

Quod ſi conſideretur magnitudo vaſta diametri K L, quæ, meo quidem judicio, eſt fere viginti quatuor millium diametrorum Terræ, patebit quam prodigioſa ſit Luminis velocitas. Etenim poſito K L continere dumtaxat viginti & duo millia ejusmodi diametrorum, ſequitur, cum intra 22. minuta percurrantur, ſingula mille diametros intra minutum unum & 16⅔ diametros intra ſecundum unum vel pulſum arteriæ permeari, quod non minus eſt quam undecenties centies centum millia hexapedarum; quoniam diameter terræ continet 2865. leucas, quarum 25. continentur in uno gradu, & ſingula quæque leuca eſt 2282. hexapedarum juxta menſuram exactam, quam adhibuit Picard, juſſu Regis Galliæ anno 1669. At ſonus, ut ſupra obſervatum eſt, intra ſecundum unum peragrat tantum 180. hexapedas. ergo lumen plusquam ſexcenties millies majori velocitate fertur, quàm ſonus, quæ tamen longè alia eſt ac momentaneus

taneus motus: eadem enim intercedit differentia, ac finitum inter & infinitum. Quandoquidem ergo motus successivus luminis hunc in modum probatus est, sequitur, prout superius affirmavi, quod soni instar in undulas sphæricas sese extendat.

At lumen & sonus licet hoc habeant commune, tamen quoad reliqua multum discrepant, cum nempe alio modo producatur motus, qui est utriusque causa, alia sit materia in quâ motus ille fit, & diversus modus sit quo motus ille communicatur. Nam sonus in causa habet concussionem subitam totius corporis, aut maximæ illius partis, quæ aëra contiguum agitat; lumen autem debet oriri ex singulis partibus corporis lucidi, ut omnes omnino cernantur, quemadmodum infra melius videre est. Nec puto motum illum explicari melius posse quam, si ponamus corpora lucida, quæ liquida sunt, ut flamma, &, forsitan, Stellæ & Sol, constare particulis fluctuantibus in materia multo subtiliori, quæ illas quàm rapidissime agitet impellatque in particulas ætheris, quæ illas circumeunt illisque multo minores sunt. Motum autem illum, in corporibus lucidis quæ sunt solida, ut carbo metallumve candens, oriri ex concussione violenta particularum ligni aut metalli quarum eæ quæ sunt in superficie materiam æthercam eodem modo impellunt. Cæterum agitatio particularum illarum, quæ lumen producunt, desideratur multò magis subita & rapida, quam agitatio corporum sonororum, cum non videamus Lumen; oriri posse ex fremitu corporis sonantis ut sonus ex motu manûs in aëre produci non potest.

Si nunc investigemus quænam possit esse materia illaætherea, in qua ille se expandit motus à corporibus lucidis oriundus, patebit eundem non esse cum illa quæ propagando sono inservit; hæc enim diversa non est ab aëre quem spiramus, quo sublato, altera tamen superstes erit. Et hoc probatur, si corpus sonorum in vase vitreo incluseris, unde

de per machinam Boyleanam, cujus ope hic tot pulchra instituit Experimenta, aërem educas. Quo in Experimento observandum, ut corpori sonoro substernantur vel gossypium vel plumæ, ne tremores suos cum vase includente aut & ipsâ machinâ communicet, quod huc usque neglectum est. Tum enim, educto aëre, minimè auditur sonus percussi licet Metalli.

Inde satis liquet non modo aëra nostrum, qui vitrum non penetrat, esse materiam illam in qua se extendit sonus, sed etiam aëra illum non esse materiam, in qua diffunditur lumen, quandoquidem, aëre sublato, non minus lumen penetrat per vitrum, quam antea.

Et postremum hoc patet clarius ex celebrata Torricellii experientia, in qua parvula tubi vibex, ex qua Mercurius decidit, licet aëre omnino vacua, tamen lumen transmittit; quod probat, materiam quandam ab aëre diversam superesse hoc in tubo, materiamque illam penetrasse aut vitrum aut hydrargyrum aut utrumque, quod tamen utrumque impenetrabile est aëri. Cumque eadem in experientia fiat vacuum, infundendo paululum aquæ hydrargyro, concluditur pariter eamdem materiam vitrum aut aquam aut utrumque permeare.

Quod ad diversos modos attinet quibus dicimus motum luminis & soni sese successive communicare, facile intelliget quisque quomodo hoc in sono fiat, modo consideret aëra ejus esse naturæ, ut possit facile comprimi redigique in spatium multo minus quam quod naturaliter occupare solet; & eum, proportionaliter prout premitur, niti ut se restituat. Ex hoc enim, si penetrabilitatem, quæ cum ipsa compressione remanet, adjungas, probari videtur aëra constare corpusculis natantibus celerique motu abreptis in materia ætherea, quæ ipsa partibus multo magis exiguis componitur. Adeoque ut nulla sit causa cur undæ soni sese extendant, præter corpusculorum illorum, ad se mutuo collidentium, vim elasticam, quando paulo

magis compressa sunt in circuitu undarum illarum quam alibi.

At luminis concitatissimus motus aliæque ipsius proprietates, eodem modo illud propagari non sinunt. Et ostendam quo pacto id fieri posse censeam; sed prius explicandum est quâ ratione corpora dura motum secum invicem communicent.

Si capias plures Globos ejusdem magnitudinis, singulosque materiâ durissima quacunque constantes, & in lineâ rectâ disponas, ita ut contigui sint; si Globo simili primum Globum impellas, motus quasi in instanti transmittetur ad ultimum usque, qui à cæteris se separabit, quamvis eos motos fuisse minimè videris, quin & Globus impellens immobilis manebit. Ubi apparet exemplum motus velocissimi, & eo majoris, quo materia Globorum durior est.

Sed & constat, progressum illum motûs non momentaneum esse, sed successivum, proindeque indigere tempore. Nam, si motus, aut, si mavis, inclinatio ad motum, non transiret successive per singulos globos, omnes eodem tempore motum sive inclinationem ad motum acquirerent, adeoque simul omnes moverentur; quod non fit; imo Globus extremus alios linquit, & velocitatem acquirit quam habuerat Globus impellens. Præterea patet ex experimentis plurimis, corpora illa, quæ in duris numeramus (putà chalybem temperatum, vitrum & achatem) elastica esse & quodammodo plicari; non modo cum porrecta sunt in longum, sed etiam ubi formata sunt in globulos, aut alio modo; id est in se ipsa paululum redire eo in loco ubi percussa sunt, statimque priorem figuram iterum induere. Nam inveni, quod ubi impuleram Globum ex vitro vel achate in frustum aliquod densum & grande ejusdem materiæ, cujus superficies plana esset & halitu meo aut alio modo obscurata paululum, quædam maculæ rotundæ supererant majores

aut

aut minores, prout major aut minor ictus fuerat; unde manifestum est corpora illa pauxillum cedere, deindeque se restituere; cui tempus impendant, necesse est.

Si nunc motum istum referamus ad motum qui producit lumen, nil vetat quominus credamus particulas æthereas constare materiâ, quæ tam ad duritiem perfectam accedat elateremque habeat, tam promtum quam volumus. Nec necesse est ut examinemus hic, quæ sit causa elateris duritieique illius, quia longius ab argumento nostro distraheremur. Dicam tamen obiter, posse concipi, quod particulæ istæ æthereæ, quantumvis tenues, adhuc aliis particulis constent, & elater illarum consistat in rapidissimo materiæ cujusdam subtilis motu, quæ illas undecumque pervadens earum texturam ita disponit ut præbeat materiæ illi fluidæ patentissimum facillimumque aditum. Hoc autem consentaneum est cum ratione elateris quam adduxit Cartesius, nisi quod non supponam cum illo poros quosdam in speciem canalium rotundorum & cavorum. Neque hoc ulli absurdum aut impossibile videri debet, cum è contrario valde credibile sit, quod Natura in tot miris effectibus edendis utatur progressu infinito variæ magnitudinis corpusculorum, & diversis horum velocitatibus.

At licet ignoramus veram elateris causam, videmus saltem quotidie, multa corpora quæ hanc proprietatem habent, adeoque nil miri facimus, ubi eandem tribuimus corpusculis tenuissimis quæ non videmus, putà materiæ æthereæ. Quod si investigetur alia ratio quâ motus luminis se successive communicare queat, nulla occurret quæ melius conveniat quam elater cum progressu æquali, qui videtur esse necessarius; quia nempe, si motus ille remitteret, prout pluri materiæ se communicaret, longius remotus à fonte luminis, magnam illam velocitatem in magnis distantiis retinere non posset. Si vero ponas elaterem esse in materia ætherea, particulæ illius sese restituent æqua-

quali velocitate, five parum five multum preffæ fuerint; adeoque lumen æquali velocitate femper progredietur.

TAB. I. Fig. 3. Sciendum vero eft, etiamfi particulæ æthereæ non difpofitæ fint rectâ lineâ quemadmodum Globi illi de quibus fuprà, fed è contra confusè fint locatæ, ita ut fingula quæque plures tangat; id tamen non obftare quò minus motum fuum particulæ illæ inter fe communicent & in anteriora femper provehantur. In quo obfervari oportet legem motûs quæ huic propagationi infervit, & ab experientia confirmatur. Si globus, ut A, plures alios fimiles C C C tangat, & impellatur ab alio Globo B, ita ut motum imprimat omnibus C C C quos tangit, transfert in illos omnem fuum motum, & poft impulfum manet immobilis, ut & Globus B; Etfi non fupponantur particulæ æthereæ effe figuræ Sphæricæ (neque enim video cur tales fupponerentur) facilè concipitur, quòd hæc proprietas impulfionis tamen contribuat ad dictam motus propagationem.

Æqualitas magnitudinis videtur magis neceffaria, quia fecus hac enim regula dabitur aliqua reflexio motûs retrorfum, eum à minori particula ad majorem tranfit, juxta regulas percuffionis quas ante paucos annos edidi.

Tamen infra videbimus æqualitatem illam magnitudinis non tam effe neceffariam, ut propagetur lumen, quam ut facilius validiusque propagetur; cum fatis etiam verifimile fit particulas æthereas factas fuiffe æquales ut tantum effectum ederent, quantum eft lumen, faltem in immenfo illo fpatio, quod ultra Atmofphæram eft, quod videtur tantum infervire transmittendo lumini Solis & Syderum.

Oftendi igitur quo modo poffit concipi lumen fefe diffundere fucceffive per undas fphæricas, quo pacto id fieri poffit cum ea celeritate quam Experientiæ & Obfervationes cœleftes poftulant. Obfervandum adhuc eft, quanquam partes Ætheris fuppofitæ funt in motu perpetuo

tuo (quod probabile eſt multis de cauſis) propagationem tamen ſucceſſivam undarum inde non poſſe impediri; quia illa non conſiſtit in tranſlatione particularum illarum, ſed tantum in levi concuſſione, quam, non poſſunt non communicare partibus vicinis, non obſtante omni motu qui agitantur & locum inter ſe mutant.

Verum particularius adhuc examinemus oportet originem undarum illarum, & modum, quô ſe extendunt. Et primo ſequitur, ex iis quæ dicta ſunt de productione luminis, ſingulam parvam partem corporis lucidi, Solis v. g. candelæ, vel carbonis ardentis emittere ſuas undas quarum pars illa eſt centrum. Si itaque diſtinguas in flamma candelæ tria puncta A B C. Circuli concentrici circa ſingulum quodque punctum deſcripti repræſentant undas quæ inde oriuntur, ſimilesque undæ concipiendæ ſunt circa ſingulum punctum ſuperficiei, & partis interioris flammæ. TAB. I. Fig. 4.

Sed cum percuſſiones in centro undarum illarum non fiant ordinata ſerie, ita putandum non eſt undas ipſas ſeſe paribus intervallis ſequi, etſi intervalla videntur paria hacce in figura, id potius feci ut videretur progreſſus ejusdem undæ æqualibus temporibus quam ut cernerentur plures undæ eodem è centro profectæ.

Cæterum non impoſſibilis videri debet prodigioſa illa multitudo undarum, quæ ſeſe mutuo interſecant absque perturbatione ulla, aut mutua deletione, cum certum ſit eandem materiæ particulam poſſe inſervire pluribus undis quæ diverſis imo contrariis è locis veniant; non modo ſi particula illa propellatur per plures ictus qui ſeſe proximè ſequantur, ſed etiam per illos qui agant in ipſam eodem inſtanti; idque propter motum qui ſucceſſive diffunditur.

Hoc clarius patebit exèmplo Globorum illorum materiæ duræ, de quibus ſuprà, in quos ſi eodem tempore ex oppoſito partibus Globos ſimiles A & D impellas; uterque eâdem, qua venit velocitate reſiliet, cæterique immobiles TAB. I. Fig. 5.

perſtabunt, quamvis motus, isque duplus, eos omnes permeaverit. Si autem motus illi contrarii ſibi invicem occurrunt in Globo B qui in medio eſt, aut in alio Globo, puta C, debet intro premi Globus ille, & utrinque reſilire, ac proinde eodem inſtanti inſervire transmittendis duobus illis motibus.

At mirum hoc videri poteſt atque incredibile, quod undulationes, ortæ à motibus corporibusque tam exiguis, poſſint ad tam immenſas diſtantias diffundi; ut e. g. à Sole aut Syderibus ad nos usque. Undarum enim illarum vis debet remittere, prout longius ab origine ſua proceſſere, adeo ut actio ſingulæ cujusque undæ ita procul dubio infirma futura fuerit, ut oculos noſtros fugiat. At non erit, quòd miremur amplius, ſi conſideremus longiſſime à corpore lucido innumeras undas, licet profectas è variis corporis illius punctis, inter ſe conjungi adeo ut unam duntaxat ſenſibiliter componam undam, quæ proinde ſatis habet efficaciæ, ut ſentiri poſſit. Itaque numerus ille infinitus undarum, quæ oriuntur uno eodemque inſtanti ex omnibus punctis ſtellæ alicujus fixis, ejusdem forſitan magnitudinis ac Sol; ille unam dumtaxat ſenſibiliter componit undam, quæ proinde poteſt ſatis fortis eſſe, ut in oculos noſtros impreſſionem aliquam faciat. Præterquam quod è ſingulo lucido puncto poſſunt naſci vel breviſſimo, quod imaginari queas, tempore multa millia undarum, ope frequentis percuſſionis corpusculorum quæ æthera in illis punctis impellunt; quod confert etiam ad reddendam actionem earum ſenſibilem.

TAB. I. Fig. 6. Supereſt conſiderandum in emanatione undarum illarum, quod ſingula particula materiæ, in qua unda quævis ſe extendit, debeat communicare motum ſuum, non modo particulæ proximæ quæ eſt in linea recta ducta à puncto lucido, ſed etiam cæteris omnibus quæ illam contingunt ejusque motui ſe opponunt. Ita ut neceſſario circa quamlibet particulam fiat unda una, cujus particula illa

la centrum fit. Sic si D C F est unda manans è puncto lucido A ut centro; particula B, una ex iis quæ continentur Sphærâ D C F, jam fecerit undam suam K C L, quæ tanget undam D C F in C eodem instanti quo unda principalis manans ex puncto A pervenit in D C F; & patet, quod solum punctum C ex unda K C L continget undam D C F, nempe illud quod est in recta linea ducta ab A B. Eumdem in modum cæteræ particulæ quæ continentur Sphærâ D C F ut b b, d d & e e, singulæ suam undam fecerint. At quælibet ex undis illis non potest non esse infinitè debilis in relatione ad undam D C F, cui componendæ inserviunt cæteræ in partem suæ superficiei quæ maxime remota est à Centro A.

Apparet præterea undam D C F determinatam esse per extremitatem motûs egressi è puncto A certo temporis spatio, cum nullus sit motus, ultra undam illam, licet aliquis supersit in spatio quo comprehenditur, scilicet in undarum particularium partibus, quæ non tangunt Sphæram D C F. Neque hoc subtilius aut longius quæsitum esse quisquam putet; postea enim videbimus proprietates luminis cæteraque quæ ad Reflexionem & Refractionem pertinent inde præcipuè explicari posse. Et hoc latuit eos qui primi examinare inceperunt undas luminis, quos inter sunt Hookius in sua Micrographia & P. Pardies, qui in Tractatu quodam cujus partem videndam mihi dedit, & quem perficere non potuit paulò post mortuus, sibi sumpserat ex illis undis probare Reflexionis & Refractionis effecta. At præcipuum fundamentum quod nititur observatione quam modò feci, desiderabatur in illius demonstrationibus, & in cæteris opiniones fovebat multum à meis diversas ut forsitan aliquando patebit, si scriptum illius servatum sit.

Ut veniamus ad proprietates luminis, observandum est primo singulam quamque partem undæ debere ita se extendere, ut extremitates illius semper comprehensæ sint eis-

eisdem lineis rectis ductis à puncto lucido. Sic pars undæ B C, habens punctum lucidum A pro centro, extendet se in arcu C E terminato per rectas A B C, A G E. Enimvero etsi undæ particulares, productæ à particulis quas comprehendit spatium C A E, ultra hoc spacium etiam progrediantur, tamen, non eodem instanti concurrunt ut simul componat undam quæ terminet motum, nisi præcisè in peripheria C E quæ est earum communis tangens.

TAB. I. Fig. 7. Exinde videre est cur lumen, nisi radii illius reflexi sint aut fracti, se diffundat tantum per lineas rectas; adeo ut sola corpora illuminet ad quæ via ab origine suâ rectâ patet. ad illa usque. Si enim v. g. esset foramen B G terminatum per corpora opaca B H, G I, unda luminis egressa è puncto A terminata semper esset per lineas rectas A C, A E, sicut modo demonstratum est; quia partes undarum particularium, quæ extendunt se ultra spacium A C E, infirmiores sunt quam ut lumen gignant.

Quantumvis autem exiguum sit foramen B G, eâdem tamen ex causâ transibit semper lumen rectâ lineâ, quia foramen illud semper satis magnum est, ut possit magnum numerum capere particularum materiæ æthereæ, quippe quæ sint incredibilis prorsus tenuitatis; ita ut pateat, quod singula quæque particula undæ procedat necessario, secundum lineam illam rectam quæ ducitur à puncto lucido. Et hinc radii luminis spectari possunt quasi essent totidem lineæ rectæ.

Cæterum patet ex iis quæ observavimus de debilitate undarum particularium, non necesse esse, ut particulæ omnes ætheris æquales sint inter se, quamquam æqualitas illa ad propagationem motûs plus conferret. Verum enim est inæqualitatem futuram esse in causa cur particula una particulam majorem impellens conetur resilire cum aliqua motûs sui parte; at inde orientur tantum paucæ undæ particulares retrorsum versus punctum lucidum quæ-

que

que lumini excitando ineptæ sunt: nulla vero inde nascetur unda quæ ex pluribus constet, veluti C E.

Altera proprietas luminis eaque haud minus admirabilis est, quod duo radii variis imo oppositis partibus profecti agunt alter per alterum, absque ullo impedimento. Unde etiam fit, ut plures spectatores per idem foramen possint videre simul diversa objecta, & ut duo homines possint alter alterius oculos eodem instanti cernere. Juxta autem ea, quæ dicta sunt & de actione luminis & quomodo undæ sese non destruant, neque altera alteram interrumpat, quando sese invicem secant non difficile est phænomena illa intelligere; quod tamen, meo quidem arbitratu, non ita obtinet in Hypothesi Cartesii, qui vult lumen consistere in pressione quâdam perpetuâ quæ tantummodo ad motum tendit. Cum enim pressio illa non possit agere simul ex duabus oppositis partibus in corpora quæ nullam inclinationem habent ad accedendum ad se invicem, nullo modo concipi potest, quo pacto duo homines alter alterius videant oculos, aut duæ faces se mutuæ illuminent.

CAPUT II.

De Reflexione.

EXplicatis Phænomenis undarum luminis, quæ extenduntur in homogenea materia, deveniendum est ad ea quæ iis accidunt, ubi in corpora alia incidunt. Ac primum docebimus quomodo ex iisdem undis explicetur reflexio luminis, & cur hæc æqualitatem Angulorum servet. Sit superficies plana & levis ex aliquo aut metallo aut vitro aut alio corpore A B, quam primo sumam esse perfecte levem, (differam enim loqui de asperitate quâ carere non potest, ad finem demonstrationis istius) & TAB. I. Fig. 7.

linea A C inclinata in A B repræsentet partem undæ luminis cujus centrum adeo remotum sit, ut pars illa A C considerari possit, tanquam linea recta. Specto enim hæc omnia, quasi essent in uno quodam plano; concipiens Planum, in quo est figura hæc, secare sphæram undæ in centro & Planum A B ad Angulos rectos, quod monuisse semel sufficit.

Pars C undæ A C, certo temporis spatio, progressa erit ad planum usque A B in B, juxta rectam C B, quam imaginari oportet venire à centro lucido, adeoque perpendicularem esse ad undam A C. Eodem autem temporis intervallo, pars A ejusdem undæ, quæ impedita fuit, saltem pro parte quominus motum suum communicaret ultra planum A B, debet continuasse motum suum in materia quæ est supra hoc planum, idque in spatio, quod æquale sit rectæ C B, efformans suam undam sphæricam, juxta id quod supra diximus; quæ unda hîc repræsentatur per circumferentiam S N R, cujus centrum est A, & semi-diameter A N æqualis C B.

Quod si porro consideremus cæteras partes H undæ A C, patet fore ut non modo pervenerint ad superficiem A B, per rectas H K parallelas C B; sed etiam produxerint ex centris K undas particulares sphæricas in diaphano, quæ repræsentantur hîc per peripherias, quarum semidiametri æquales sunt K M, id est continuationibus rectarum H K ad rectam usque B G, parallelam A C.

Sed circumferentiæ illæ omnino omnes habent pro tangente communi Rectam B N, eamdem scilicet quæ à B facta est tangens primi ex his circulis, cujus A erat centrum, & A N semi-diameter æqualis B C, ut videre facile est.

Linea igitur B N (comprehensa puncto B & puncto N ubi cadit perpendicularis puncti A) quasi efformata est ex illis omnibus circumferentiis, terminatque motum factum à reflexione undæ A C; & in ea etiam motus est in multo majori quantitate quam alibi. Idcirco, juxta ea quæ expli-

explicata fuere, B N est propagatio undæ A C, quo momento pars illius C pervenit in B. Etenim nulla alia est linea, quæ, ut B N, sit communis tangens omnium dictorum circulorum, nisi fortè B G infra planum A B; quæ B G esset propagatio undæ, si motus per materiam homogeneam potuisset ad materiam infra planum progredi. Quod si quis videre velit quomodo unda A C successive venerit in B N, ducantur in eadem figura rectæ K O parallelæ B N, & rectæ K L parallelæ A C. Ita patebit undam A C confractam quasi fuisse in omnibus O K L successive, iterumque rectam fuisse factam in N B.

Exinde videre est angulum reflexionis æqualem esse angulo incidentiæ. Nam cum triangula A C B, B N A rectangula sint habeantque latus A B commune, & latus C B æquale N A; sequitur angulos lateribus illis oppositos, & proinde angulos quoque C B A, N A B, fore æquales. At veluti C B perpendicularis ad C A designat directionem radii incidentis, ita A N perpendicularis undæ B N directionem radii reflexi designat. Ergo radii illi æqualiter inclinantur ad Planum A B.

Verum in considerandâ præcedenti demonstratione posset quis dicere lineam quidem illam B N esse tangentem communem undarum circularium in plano figuræ; sed undas illas, cum revera sint sphæricæ, habere adhuc infinitas ejusmodi tangentes, nempe omnes lineas rectas, quæ à puncto B ducuntur in superficie coni formati à recta B N circa axem B A. Superest igitur probandum ne minimam quidem in hoc difficultatem esse; simulque patebit cur radius incidens & radius reflexus semper sint in uno eodemque plano perpendiculari ad planum reflectens. Dico igitur undam A C, cum spectetur tantummodo ut linea, nullum posse lumen gignere. Etenim radius visibilis luminis, quantumlibet sit tenuis, tamen semper aliquam crassitudinem habet; adeoque, ad repræsentandam undam cujus progressus radium illum efformat, loco lineæ A C concipienda est figura quædam plana, qua-

 lis



TAB. I. Fig. 8. lis est Circulus H C, ponendo, ut ante, punctum lucidum infinite distans. Facile autem patet, ex superiori demonstratione, ubi unaquæque particula undæ H C pervenerit ad planum A B, indeque genuerit singula suam particularem undam; undas illas omnes, ubi C pervenerit in B habituras esse commune planum quod illas tangat, circulum scilicet B N æqualem C H & quod sectum erit in medio, & ad angulos rectos ab eodem plano, quod ita secat circulum C H & Ellipsim A B.

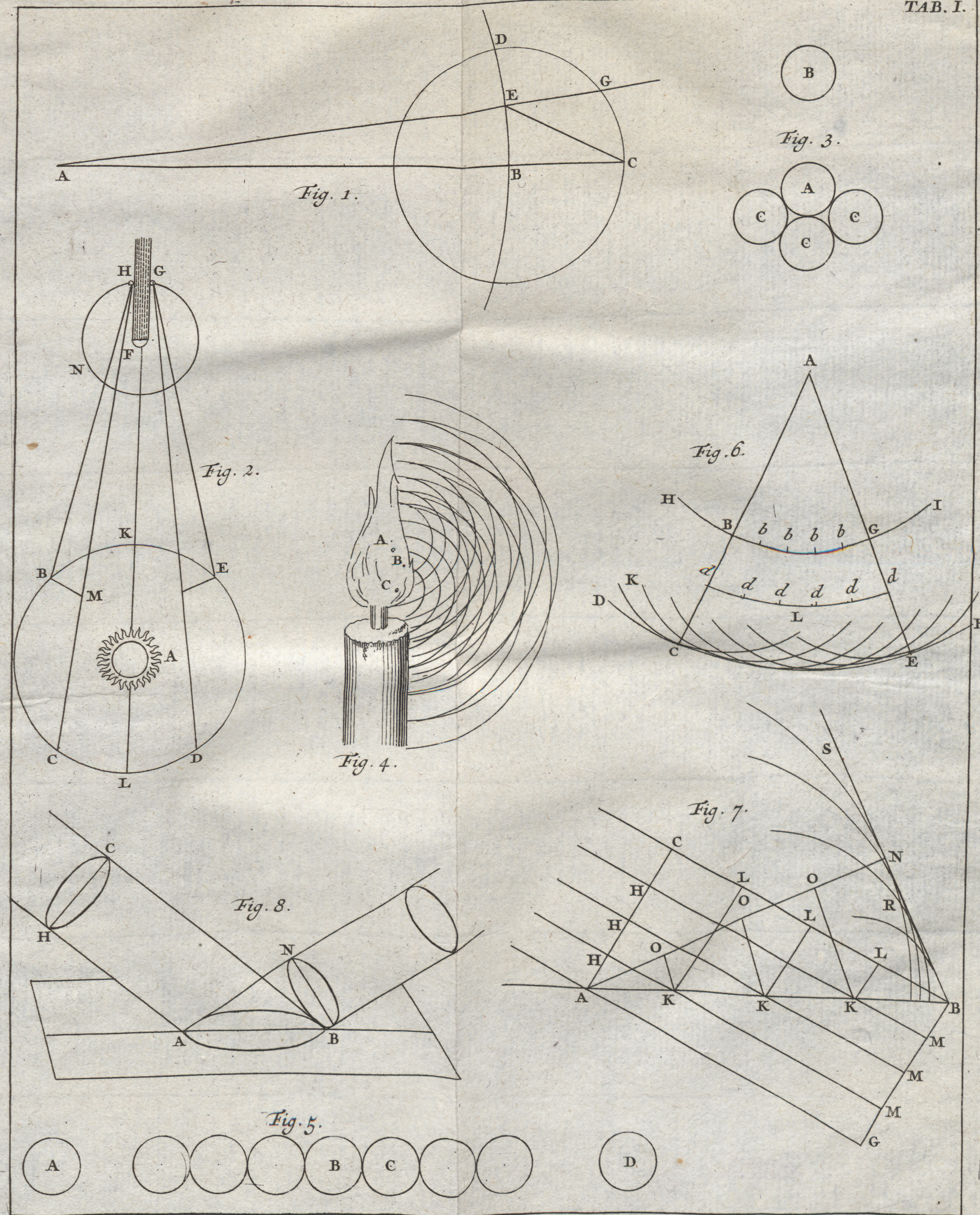
Patet etiam dictas Sphæras particularium undarum non posse aliud commune planum tangens habere, præter circulum B N; ac proinde in illo plano major multo erit copia motûs reflexi quam alibi, adeoque planum id transferet lumen continuatum undæ C H.

Dixi etiam in demonstratione superiori motum partis A undæ incidentis non potuisse ultra planum A B se communicare, aut saltem non potuisse in totum. Ubi hoc observatu opus est quod, etiamsi motus materiæ æthereæ se communicaret ex parte ipsi corpori repercutienti, hoc tamen minime potest mutare velocitatem progressus undarum, à qua angulus reflexionis pendet. Etenim levis percussio, ut & validissima quævis, undas velocitatis ejusdem in simili materia necessario gignit; quod fit quia corpora elastica, ut supra dictum est, sive leviter premantur sive valide, tamen æqualibus temporis intervallis se restituunt semper. Itaque, in quavis reflexione luminis in quodcunque corpus, Anguli reflexionis & incidentiæ æquales esse debent; etsi corpus ejus esset naturæ, ut aliquid de motu detraheret qui lumen incidens facit. Et vero experientia testis est nullum esse corpus leve, quod repercussum hanc regulam non sequatur.

At hoc imprimis in demonstratione nostra observandum est quod ea non postulat ut superficies repercutiens spectetur tanquam planum leve, ut supposuere omnes quicumque



TAB. I.


A
B
C
D
E
G
Fig. 1.
B
Fig. 3.
A
C
C
C
H
G
F
N
Fig. 2.
K
B
M
E
A
C
L
D
A.
B.
C.
Fig. 4.
A
Fig. 6.
H
B
b b b b
G
I
K
d
d d d d
d
D
L
F
C
E
S
Fig. 7.
C
N
H
L
O
O
R
H
L
H
O
L
H
A
K
K
K
B
M
M
M
G
C
Fig. 8.
H
N
A
B
Fig. 5.
A
B
C
D


POLITECHNIKA GDAŃSKA *
BIBLIOTEKA
CENTRALNA

que conati sunt explicare reflexionis phænomena; sed tantummodo ut ei levitas illa tribuatur quæ oritur particulas corporis repercutientis aliis juxta aliis positis, quæ majores sunt particulis materiæ æthereæ, sicut videre est ubi dicemus de transparentia & opacitate corporum. Cum enim superficies constet partibus ita juxta se invicem positis, particulæque æthereæ supra fluctuent sintque minores, evidens est non posse demonstrari æqualitatem angulorum incidentiæ & reflexionis ex eo quod accidit globo in parietem injecto, quanquam eâ comparatione semper usi sunt alii. E contrario in hypothesi nostra res absque ullo labore explicari potest. Namque particulæ hydrargyri v. g. cùm ita exiguæ sint, ut in minima quavis superficie visibili, necessario sint concipiendæ ad multa millium millia, dispositæ veluti acervus arenæ levigatus quantum fieri potuisset; tum superficies illa fit levis respectu nostri ut vitrum politissimum, licétque respectu particularum ætherearum semper aspera maneat, manifestum est centra Sphærarum omnium particularum reflexionis, de quibus diximus, esse fere in eodem plano polito; adeoque communem tangentem posse illis convenire satis perfectè, quantum ad lumen gignendum necesse est. Atque hoc unum requisitum est, in nostro demonstrandi modo, ut fiat æqualitas dictorum angulorum, & reliquus motus undiquaque reflexus contrarium effectum producere non poterit.

CAPUT III.

De Refractione.

QUemadmodum phænomena reflexionis explicata fuere per undas repercussas in superficie corporum levium; ita nunc explicabimus quid sit perlucidum & refractionis phænomena per undas quæ se extendunt intra & per corpora

diaphana, ſive ſolida ſint, ut vitrum, ſive liquida ut aqua, olea, &c. Ut autem nemini mirum videatur, quod ponam undis corpora illa permeari, oſtendam prius quod hoc non unico modo poſſibile concipiatur.

Ac primum, etiamſi materia ætherea non pervaderet corpora diaphana, tamen ipſæ corporum illorum particulæ poſſent ſucceſſive inter ſe motum undarum communicare, ut particulæ æthereæ faciunt; ſi, æque ac hæ, vi elaſticâ inſtructæ ponantur. Et hoc facile concipi poteſt, quoad aquam cæteroſque diaphanos liquores, quippe qui particulis haud cohærentibus conſtent. At difficilius idem videtur, quantum ad vitrum aliaque corpora diaphana & dura pertinet, quia non videtur eorum ſoliditas permittere, ut partim moveantur, quin moveantur ſimul tota. Hoc tamen minime neceſſarium eſt, quia ſoliditas illa non eſt talis, qualis nobis apparet, cum probabile ſit corpora illa conſtare potius particulis aliis juxta alias collocatis, quas teneat una conjunctas preſſio materiæ alicujus exterioris, & figurarum irregularitas. Nam primo raritas corporum illorum apparet quia facile hæc penetrat materia vorticum magneticorum ut & illa, quæ gravitatis cauſa eſt. Præterea dici nequit, corpora illa texturam habere ſimilem illi, quæ eſt aut ſpongiarum aut panis levioris, quia à calore ignis liqueſcunt illa, ſituſque particularum inter ſe ſic mutatur. Supereſt igitur, veluti dictum eſt, ut ſint acervus quidam particularum, quæ quidem ſe contingant, nec tamen ſolidum unum continuum faciant ſimul. Quod cum ita ſit, motus, quem particulæ illæ accipiunt ad continuandas undas luminis, cum ſe communicet ex una ad alteram, nec tamen inde particulæ illæ locum aut ordinem ſuum mutent, poteſt faciliimè agere, neque tamen ullo modo officere ſoliditati compoſiti illius quod nobis viſibile eſt.

Preſſionis autem exterioris nomine minime intelligenda eſt preſſio aëris quæ non ſufficeret, ſed alia quædam materiæ

teriæ alicujus fubtilioris, quæ preffio fe manifeftat in certa experientia quam fortuna mihi jamdudum obtulit; fcilicet in aqua aëre expurgata, quæ fufpenfa manet in tubo vitreo cujus foramen inferius patet, licet eductus fit aër vasculo, in quo includitur tubus.

Poteft itaque hunc in modum translucidum corpus concipi, etiamfi materia ætherea quæ lumini infervit, vitrum non pervadat, neque ullos reperiat poros, per quos fe infinuet. At veriffimum eft materiam illam non modo id permeare, fed etiam facile; quod probat experimentum Torricellianum fuprà memoratum; quia ubi hydrargyrum & aqua ex fuperiori parte tubi vitrei cedunt eodem inftanti plena materià ætherea videtur effe, quia nempe lumen tranfit. Sed & alterum experimentum eft, quod probat eandem facile penetrare, non modo in corpora dura, fed etiam in alia quæcunque.

Ubi tranfit lumen per Sphæram concavam vitream, undique occlufam, conftat fphæram illam non minus materià ætherea refertam effe, quam illam ambientia fpatia. Materia ætherea autem conftat particulis aliis alias proximè tangentibus. Si igitur ita inclufa effet vitro, ut per poros egredi nequiret, neceffario fequeretur illa motum Sphæræ, cùm Sphæra moveretur loco; adeoque eadem fere vi opus foret ut certus quidam motus imprimeretur illi Sphæræ pofitæ in plano horizontali, ac fi plena effet hydrargyro aut aquâ, quia corpus quodcumque refiftit velocitati motûs, quem ipfi volumus imprimere, pro quantitate materiæ quam continet & quæ motum illum debet fequi.

At è contrario reperimus Sphæram refiftere dumtaxat impreffioni motûs, pro quantitate vitri ex quo conflata eft; ergo neceffe eft ut materia ætherea quæ vitro continetur, non fit inclufa, fed poffit liberrime per poros elabi. Infra videre eft eandem penetrabilitatem eodem modo probari in corporibus opaçis.

Altera

Altera ratio, eaque verisimilior, explicandi quomodo corpora sint translucida, est hæc undas luminis continuari in materia ætherea, quæ semper occupat poros & interstitia diaphanorum corporum. Cum enim poros pervadat illa facile & semper, sequitur eos ejusmodi materiâ continuo esse plenos. Quinimmo demonstrari potest interstitia illa multo plus spatii capere, quam particulæ cohærentes quibus constant corpora. Etenim si verum est quod modo diximus, requiri vim aliquam ad imprimendam certam velocitatem horizontalem corporibus, pro quantitate materiæ cohærentis, quam continent; & si proportio vis illius rationem gravitatum sequitur, quod experientia confirmat; ergo quantitas materiæ quæ constituit corpora, gravitatum etiam rationem sequitur. Videmus autem aquæ inesse tantum decimam quartam partem ponderis quæ inest pari portioni hydrargyri; ergo materia aquæ non occupat decimam quartam partem spatii quod sua massa capit. Verum spatium multo minus occupare debet, cum mercurius levior sit auro, & materia auri admodum parum densa; quod colligitur ex eo quod materia vorticum magneticorum, & ea, quæ gravitatis causa est, aurum quam liberrime pervadant.

Objiciat procul dubio quis mirum esse omnino, si corpus aquæ adeo rarum sit, particulæque illius tam exiguam occupent partem spatii extensionis suæ apparentis; quomodo ita compressioni resistat, nec sinat se condensari quantumvis illam premas, imo retineat semper liquiditatem suam, ipso pressionis tempore.

Est sane difficultas non parva quam tamen solvere non impossibile est, si dicas motum rapidissimum concitatissimumque materiæ subtilis qui aquam liquidam reddit, concutiendo nempe ejus particulas, quibus constat, retinere fluiditatem, non obstante pressione applicitâ huc usque.

Itaque cum ejusmodi sit corporum diaphanorum raritas,

tas, facile intelligitur undas continuari posse in materia ætherea quæ particularum replet interstitia. Quin & credibile est, progressum undarum illarum debere intra corpora paulo lentiorem fieri, præ exiguis anfractibus, quos eædem particulæ faciunt. Et in diversa hac velocitate luminis ostendam consistere refractionis causam.

Indicabo prius tertium ultimumque modum quo concipi potest corpora esse translucida, nempe ponendo motum undarum luminis se communicare indifferenter, tum particulis materiæ æthereæ quæ occupant interstitia corporum, tum particulis quæ corpora ipsa componunt; adeo ut motus ille ab aliis ad alias transeat. Inferius patebit hypothesim hanc multum conducere ad explicandam quorumdam corporum diaphanorum refractionem duplicem.

Objiciat mihi quis, quod, cum particulæ ætheris minores sint corporum diaphanorum particulis, quippe quæ earum intervalla pervadant, sequatur inde, non posse illis multum motus imprimere; responderi potest particulas corporum illorum constare aliis adhuc particulis minoribus, quæque adeo motum ab ætheris particulis accipiunt.

Cæterùm, si particulæ corporum diaphanorum habent elaterem paulo minus promptum quam particulæ ætheris, quod nil vetat quominus ponamus, sequitur rursum progressum undarum luminis fore intra corpora illa lentiorem, quam est extra in materia ætherea.

Atque hoc omne est, quod verisimilius mihi visum fuit de modo, quo undæ luminis corpora diaphana pervadunt; addendumque est, quâ in re corpora illa à corporibus opacis differant; & hoc eò magis, quod videri posset, propter facilem penetrationem corporum per materiam æthercam, nullum non corpus diaphanum futurum esse. Etenim ex eodem exemplo Sphæræ concavæ, quo usus sum, ut parvam densitatem vitri probarem, & facilem per illam materiæ æthereæ penetrabilitatem, probari

posset eandem penetrabilitatem cæteris corporibus metallisque ipsis convenire. Etsi enim Sphæra esset ex argento, v. g., certe contineret in se aliquantulum materiæ illius æthereæ quæ lumini servit, cum, ubi obturabatur Sphæra, erat in ea portio quædam materiæ illius simul cum aëre. Attamen ubi Sphæra illa argentea occlusa est & plano horizontali imposita, resistit tantum impresso motui pro quantitate argenti è quo conflata est. Ergo dicendum est, ut supra, materiam æthercam inclusam non sequi motum Sphæræ; adeoque argentum non minus libere permeari à materia illa, quam vitrum ipsum. Ergo particulæ illæ æthereæ frequenter & perpetuo inter poros corporum opacorum eunt & redeunt; &, cum propagando lumini inserviant, videntur corpora illa opaca debere quoque, ut vitrum, diaphana esse, quod tamen non est.

Unde dicemus ergo, opacitatem illorum oriri? an à mollitie particularum quibus constant, quia scilicet particulæ hæ, utpote particulis minoribus constantes, aptæ sunt mutare figuram ubi impelluntur à particulis æthereis, quarum motum sic retardant, adeoque continuationem undarum luminis impediunt? At hoc impossibile prorsus est, si enim particulæ metallorum molles sunt, qui fit ut argentum lævigatum mercuriusque lumen tam valide repercutiant? Verisimillimum igitur puto corpora metallorum, quæ fere sola sunt vere opaca, particulas habere molles duris intermixtas; ita ut aliæ repercutiant lumen, aliæ transitum luminis impediant. Cum contra corpora diaphana particulis tantum duris constent, quæ elaterem habent, inserviuntque unà cum Particulis materiæ æthereæ, ut suprà observatum est, propagandis undis luminis.

Deveniamus nunc ad explicanda refractionis phænomena, ponendo, ut jam fecimus, undarum luminis per corpora diaphana transitum, & diminutionem velocitatis quam undæ ibidem patiuntur.

Præ-

Præcipua proprietas Refractionis eſt, quod, ubi Radius luminis, ut, A B eſt in aëre, & obliquè incidit in ſuperficiem levem corporis diaphani, ut F G, frangatur in puncto incidentiæ B; ita ut cum recta D B E, quæ perpendiculariter ſuperficiem ſecat, faciat angulum C B E, minorem A B D, quem faciebat cum eadem perpendiculari in aëre. Menſura autem angulorum reperietur, ſi deſcribas circulum è puncto B qui ſecet radios A B, B C. Perpendiculares enim A D, C E ductæ à punctis interſectionis in rectam D E, quæ vocantur Sinus Angulorum A B D, C B E, habent inter ſe certam quandam rationem, quæ ſemper eadem eſt in quibusvis radii incidentiæ inclinationibus, quantum ad certum quoddam corpus diaphanum; quæ eſt in vitro fere ut 3 ad 2 in aqua fere ut 4 ad 3, & ſic in diverſis corporibus diaphanis diverſa. TAB. II Fig. 1.

Altera proprietas eaque ſimilis priori eſt ea, quod, nempe refractiones reciprocæ ſint inter radios qui ingrediuntur corpus diaphanum, eosque qui exeunt, id eſt, ſi radius A B ingrediundo corpus diaphanum frangitur in B C, ita C B, ſumptus pro radio qui intra idem corpus eſt, frangetur egrediendo in B A.

Ut explicemus ergo phænomena iſta ex principiis noſtris, ſit recta A B quæ repræſentat ſuperficiem planam, terminantem corpora diaphana C & N verſus collocata. Cum autem dico planam, non de perfecta æqualitate loquor, ſed de ea quam poſuimus tractando de Reflexione, idque iisdem de cauſis. Linea A C repræſentet partem undæ alicujus luminis, cujus centrum adeo remotum ſumatur, ut pars illa poſſit ſpectari tanquam linea recta. Ergo pars C undæ A C, intra certum temporis ſpatium, perveniet ad planum A B, juxta rectam C B, quam imaginari debemus oriri à corpore lucido, & quæ proinde ſecabit A C ad angulos rectos. At, intra idem temporis intervallum, pars A perveniret in B, per rectam A G æqualem & parallelam rectæ C B; & TAB. II. Fig. 2.

 pars

pars integra undæ A C eſſet in G B, ſi materia corporis diaphani æque velociter transmitteret motum undæ ac materia ætheria. Verum ponamus lentius transmittere, ex. gr. tertiâ parte. Diffuſus igitur erit motus à puncto A, in materia corporis diaphani; per ſpatium æquale duabus tertiis rectæ C B ſuam propriam undam emittentis, juxta ea quæ ſuperius diximus; quæ unda repræſentatur per circumferentiam S N R, cujus centrum eſt A, & ſemi-diameter æqualis $\frac{2}{3}$ rectæ C B. Quod ſi conſideremus deinde alias partes H undæ A C, apparet eas, eodem inſtanti quo pars C venerit in B, non modo perventuras fuiſſe ad ſuperficiem A B per rectas H K parallelas C B; ſed etiam effuſuras fuiſſe in diaphano è centris K particulares undas, repræſentatas in figura per peripherias, quarum ſemidiametri æquales ſunt $\frac{2}{3}$ linearum K M, id eſt $\frac{2}{3}$ continuationum rectarum H K ad rectam B G. Illæ enim ſemidiametri æquales fuiſſent lineis K M integris, ſi ambo diaphana eſſent æque penetrabilia. Omnes autem circumferentiæ illæ habent pro tangente communi lineam rectam B N, eamdem ſcilicet quæ ex puncto B fit tangens circumferentiæ S N R; quam priorem conſideravimus. Nam in promptu eſt videre cæteras omnes circumferentias tangere eamdem B N, â puncto B ad punctum contactus N, in quem cadit A N perpendicularis ad B N.

Ergo B N, quæ quaſi efformata eſt ex arcubus exiguis circumferentiarum illarum, terminat motum quem corpus diaphanum ab unda A C accepit; ibique motus multo majori quantitate eſt quam alibi. Adeoque linea illa, juxta ea quæ ſæpius diximus, eſt propagatio undæ A C, eo ipſo momento quo pars hujus C pervenit in B. Enimvero nulla alia eſt linea infra planum A B, quæ ut B N, ſit undarum omnium particularium communis tangens. Quod ſi ſcire velimus, quo modo unda A C venerit ſucceſſive in B N, ducantur in eadem figura rectæ K O parallelæ rectæ B N, & omnes K L paral-

rallelæ A C. Hunc in modum videbimus undam C A ex recta factam fuisse fractam in omnibus L K O successive & rursum factam fuisse rectam in B N. Quod cum evidens sit ex demonstratione superiori, supervacaneum est plura addere.

Atqui, in eadem figura, si ducatur E A F quæ secet planum A B ad angulos rectos in puncto A, & A D sit perpendicularis undæ A C, D A radium incidentem luminis, & A N, quæ perpendicularis est ad B N, radium fractum repræsentabunt; cum radii nihil aliud sint præter lineas rectas, secundum quas undæ luminis se extendunt.

Unde facile est agnoscere præcipuam hanc refractionum proprietatem, scilicet sinum anguli D A E habere semper unam eamdemque rationem cum sinu anguli N A F, qualiscumque sit inclinatio radii D A; & rationem illam esse eandem ac rationem velocitatis undarum in diaphano sito A E versus cum earumdem velocitate in altero A N versus. Considerata enim recta A B, quasi esset radius circuli, sinus anguli B A C est B C, & sinus anguli A B N, A N. At Angulus B A C æqualis est D A E, cum uterque additus angulo C A E faciat angulum rectum. Et Angulus A B N æqualis est N A F, cum uterque simul cum B A N faciat Angulum rectum. Ergo sinus Anguli D A E etiam est ad sinum Anguli N A F, ut B C ad A N. Atqui ratio B C ad A N erat eadem ac ratio velocitatum luminis, tum in materia A E versus, tum in materia A F versus; ergo sinus quoquorum Anguli D A E, & N A F, erunt ut velocitates supra dictæ luminis.

Ut videamus deinde qualis debeat esse refractio, ubi undæ luminis ingrediuntur corpus aliquod in quo motus propagatur velocius quam in eo unde exeunt, (ponamus iterum juxta rationem trium ad duo) satis est repetere eandem tum constructionem tum demonstrationem quæ supra, TAB II. Fig. 3.

 supra,

ſupra, modo ubique loco $\frac{2}{3}$ ponamus $\frac{3}{2}$. Ex eadem argumentandi ratione patebit, in altera figura, quod, ubi pars C undæ A C pervenerit ad ſuperficiem A B in B, pars integra undæ A C pervenerit in B N; ita ut B C perpendicularis ad A C ſit ad A N perpendicularem ad B N, ut duo ad tria. Et eadem ratio 2 ad 3 erit ſinum inter anguli E A D, ſinumque anguli F A N.

Hinc videmus reciprocationem refractionum radii ingredientis diaphanum, ejusdemque exeuntis; ſcilicet ſi N A incidens in ſuperficiem exteriorem A B, frangitur in A D, radius quoque D A diaphano egrediens frangetur in A N.

Patet ratio quoque phænomeni notatu digni, quod in hac refractione occurrit; nempe à certa quadam obliquitate radii incidentis D A, non poteſt hic in diaphanum alterum penetrare. Si enim angulus D A Q aut C B A ejusmodi eſt, ut in triangulo A C B, C B æqualis ſit $\frac{2}{3}$ lineæ A B, aut major; tum A N non poteſt conſtituere latus unum trianguli A N B, quia evadit æqualis lineæ A B aut major: adeo ut pars undæ B N reperiatur nullibi, nec proinde A N quæ perpendicularis illi eſſe debebat. Itaque radius incidens D A tunc non penetrat ſuperficiem A B.

Cum ratio velocitatum undarum eſt, ut in exemplo noſtro, duorum ad tria, quæ eſt ratio quæ vitro & aëri convenit; tunc angulus D A Q debet eſſe major 48. grad. 11. min. ut radius D A poſſit ſe frangendo tranſire. Ubi vero ratio velocitatum illarum eſt trium ad quatuor, quod fere contingit in aqua & aëre; tunc angulus ille D A Q excedat oportet 41. grad. 24. min. Hocque cum experientia plene conſentaneum eſt.

Verum poſſet quis petere, cum incurſus undæ A C in ſuperficiem A B motum debeat producere in materia quæ eſt ad alteram partem, cur lumen ibi non tranſeat? cui facile reſpondebimus, ſi ſuperiorum obſervationum memine-

minerimus. Licet enim innumeræ undæ peculiares diffundantur in materia trans A B collocata, tamen nunquam accidit undas illas habere eodem instanti eamdem lineam tangentem (sive rectam sive curvam) adeoque nulla est linea in quam desinat propagatio undæ A C ultra planum A B, neque ubi satis motûs ad producendum lumen colligatur. Et haud difficulter rei hujus veritas patebit, nempe, cum C B sit major $\frac{2}{3}$ A B, undas, ultra planum A B excitatas, non habere communem tangentem; si è centris K describantur circuli qui radios habeant æquales $\frac{3}{2}$ L B quæ respondent. Omnes enim circuli illi alii aliis inclusi erunt, & ultra punctum B se extendent.

Hoc autem observandum est quod, cum angulus D A Q minor sit quam ut sinat radium D A fractum in alterum diaphanum ingredi, repercussio interior, quæ fit in superficie A B, multo clarior fiat; quemadmodum facile est experiri cum triangulari prismate: quod nullo negocio ex hypothesi nostra explicari potest. Cum angulus D A Q adhuc ejus est magnitudinis, ut radio D A possit transitum præbere, manifestum est lumen partis undæ A C minori spatio contineri, ubi pervenit in B N. Apparet quoque undam B N eò minorem fieri, quò angulus C B A aut D A Q factus est minor, donec, diminuto hoc ad usque determinationem supra dictam, unda illa B N quasi tota unum in punctum colligitur. Sive, quod idem est, ubi pars C undæ A C pervenit in B, undam B N, quæ est propagatio A C, totam in idem punctum B reductam esse; quemadmodum, quando pars H pervenerat in K, pars A H tota in idem punctum K erat reducta. Unde liquet, prout unda C A occurrit superficiei A B, magnam fuisse motûs copiam secundum superficiem illam; motumque illum sese intra corpus diaphanum diffudisse & in eo multum virium addidisse undis particularibus, quæ producunt repercussionem interiorum in superficiem

ciem A B, ex regulis repercussionis superius explicatis.

Et quoniam, minuto paululum incidentiæ D A Q, unda B N utcunque magna ad nihilum redigitur; (namque, ubi angulus ille est in vitro 49. graduum & undecim minutorum, angulus B A N adhuc est 11. graduum & 21. minutorum, &, ubi angulus D A Q unum modo gradum amisit, angulus B A N ad nihilum est reductus, & proinde unda B N ad unum tantum punctum reducitur) inde venit quod reflexio interior ex obscura subito fit clara, ubi angulus incidentiæ talis est, ut non amplius liberum transitum refractioni præbeat.

Quod autem attinet ad reflexionem interiorem ordinariam, id est, eam quæ fit ubi angulus incidentiæ D A Q satis habet magnitudinis ad faciendum ut radius fractus trans superficiem A B penetrare queat; reflexio illa fieri debet in particulas materiæ quæ corpus diaphanum extrinsecus contingit; & forsitan in particulas aëris aliasque materiæ æthereæ immixtas eâque magis crassas. Quemadmodum ab altera parte reflexio exterior corporum illorum fit in particulas illas, quibus constant, & quæ crassiores etiam sunt materiâ æthereâ, cum ista inter eorum intervalla fluat. Fateor hîc superesse difficultatem aliquam in experimentis, ubi reflexio illa interior fit, licet particulæ aëris nil ad id conferre possint, ut accidit in tubis unde aër exsuctus est.

Cœterum Experientia nos docet ambas illas reflexiones parem fere vim habere, quæ in variis corporibus eo magis intenditur, quo major est corporum illorum refractio. Itaque manifesto liquet vitrum fortiùs repercutere quam aquam, & adamantem fortiùs quam vitrum.

Theoriæ huic nostræ circa refractionem finem imponam, ubi demonstravero propositionem quandam notabilem quæ inde pendet; scilicet radium aliquem luminis, ut ab uno puncto ad alterum transeat, quando puncta illa in di-

diversis sunt diaphanis, frangi eum in modum in superficie plana quæ utrumque medium conjungit, ut quam minimo fieri potest tempore id faciat, sicuti contingit in repercussione adversus superficiem planam. D. Fermat primus proprietatem hanc refractionis proposuit, existimabatque, ut nos ipsi, ac planè diversè à Cartesio, lumen per vitrum & aquam tardius meare quam per aëra. Verum præterea supponebat proportionem illam constantem sinuum, quam modo probavimus ex solis variis gradibus velocitatis; sive, quod idem est, ponebat, præter varias illas velocitates, lumen in transitu suo omnium minimum tempus impendere, ut inde proportionem constantem sinuum colligeret. Demonstratio illius quam videre licet, tum in Libris quos edidit, tum in Epistolis Cartesii, longissima est; ideoque aliam simpliciorem faciliioremque proponam.

Sit superficies plana K F; punctum A in diaphano, quod lumen faciliùs permeat, aëra puta; punctum C in altero quod difficilius pervaditur, puta aquam; ponamus radium pervenisse ab A per B in C & fractum fuisse in B ex lege paulo superius demonstrata. Sive datâ lineâ P B Q, quæ secat planum ad angulos rectos, sinus anguli A B P habeat ad sinum anguli C B Q eamdem rationem, quam velocitas luminis in diaphano ubi est A, ad ejusdem velocitatem in diaphano ubi est C. Demonstrandum est tempora transitûs luminis per A B & B C, simul sumpta, esse omnium brevissima. Ponamus ergo lumen venisse per alias lineas, & primo per A F, F C, ita ut punctum refractionis F magis distet quam B a puncto A; & sit A O perpendicularis ad A B, F O parallella A B; B H perpendicularis ad F O, & F G perpendicularis ad B C. TAB. II. Fig. 4.

Cum ergo angulus H B F æqualis sit P B A, & angulus B F G æqualis Q B C; sequitur sinum anguli H B F habiturum etiam ad sinum anguli B F G eandem rationem, quam velocitas luminis in diaphano A ad velocita-

tem ejusdem in diaphano C. Atqui sinus illi sunt rectæ H F, B G, sumptâ B F pro semi-diametro circuli. Ergo lineæ illæ H F, B G habent inter se eamdem velocitatum rationem. Itaque tempus luminis per H F, posito quod radius esset O F, æquale esset tempori luminis per B G intra diaphanum C; sed tempus per A B æquale est tempori per O H; ergo tempus per O F æquale est tempori per A B, B G. Rursum tempus per F C longius est quam per G C, ergo tempus per O F C erit longius quoque quam per A B C. At A F est major quam O F; ergo tempus per A F C tanto longius erit tempore per A B C.

Ponamus nunc, radium luminis venisse ab A in C per A K & K C; puncto refractionis K propiori A quam punctum B, & sit C N perpendicularis ad B C, K N parallela B C, B M perpendicularis ad K N, & K L ad B A.

Hìc B L & K M sunt sinus angulorum B K L & K B M, id est angulorum P B A & Q B C, adeoque sunt inter se, ut velocitas luminis in diaphano A ad velocitatem ejusdem in diaphano C. Ergo tempus per B L æquale est tempori per K M, &, cum tempus per B C æquale sit tempori per M N, tempus per L B C æquale erit tempori per K M N. At tempus per A K longius est quam per A L; ergo tempus per A K N longius est quam per A B C. Et cum K C longior sit quam K N, tempus per A K C eò longius erit tempore per A B C. Itaque liquet tempus per A B C esse omnium brevissimum, quod demonstrandum erat.

CAPUT IV.

De Refractione Aëris.

DEmonstravimus, quo pacto motus ille, qui luminis causa est, extendatur per undas sphæricas in materia homogenea; & manifestum est quod, ubi materia non est

est homogenea, sed ejus generis ut motus citius communicetur unam partem quam alteram versus, tunc illæ nequeant esse sphæricæ, sed diversas figuras induant pro diversis spatiis quæ motus successivus æqualibus temporibus percurrit.

Ex eo primum explicabimus refractiones aëris, qui hinc ad nubes ultraque extenditur; quarum phænomena sunt notabilia; per eas enim sæpenumero videmus corpora quæ secus præ rotunditate terræ non videremus: insulas nempe & cacumina montium quæ à navigantibus cernuntur. Earumdem ope, Sol & Luna videntur orti esse antequam reipsa sint, & occidere tardius quam occidant; ita ut sæpe visa sit Luna deficiens, cum Sol adhuc supra Horizontem appareret. Et inde altitudines Solis, Lunæ, aliorumque Syderum semper videntur paulo majores quam sunt, quod ex iisdem refractionibus oritur, ut Astronomi omnes probe norunt. Atque hoc ex experimento sequenti ad oculum manifestatur. Scilicet si telescopium ita collocaris, ut spectet objectum quod distet semileuca aut amplius, puta turrem sive domum; si ejus ope idem corpus variis horis observes, tubusque eodem modo maneat conversus semper; videbis non easdem semper objecti partes in medio foramine tubi se oculis objicere; at plerumque mane & vesperi, ubi plures sunt vapores prope terram, objecta illa altius adscendere videntur, ita ut media illorum pars aut amplius jam non videri possit; eademque circa meridiem descendent, ubi dissipati erunt vapores.

Qui ad refractionem attendunt dumtaxat in superficiebus quæ distinguunt corpora diaphana diversæ naturæ, illi laborarent non parum in explicandis phænomenis, quæ tamen ex Theoria nostra nullo explicantur negocio. Nemo nescit, aëra illum qui nos circumdat, præter particulas quæ illi propriæ sunt, & fluctuant in materia ætheria, ut jam docuimus, adhuc repleri particulis aqueis, quas calor at-

tollit: & aliunde constat ex certissimis experimentis eo magis imminui densitatem aëris, quo altior est. Sive igitur particulæ aquæ & aëris, ope particularum materiæ æthereæ, participent de motu qui luminis causa est, sed ita, ut illæ elaterem habeant minus promptum quam hæ; sive occursus & impactus particularum aëris & aquæ in propagationem motus particularum ætherearum, progressum harum retardet. Sequitur semper utrasque, cum inter particulas æthereas volitent, debere facere ut aër, ab ingenti altitudine ad terram usque per gradus, viam minus facilem extensioni undarum luminis præbeat.

Idcirco figura undarum debet fere talis fieri, qualem figura exhibet. Scilicet, si A est lumen aliquod aut apex turris alicujus, qui videri possit; debent undæ inde ortæ se in altum magis extendere, minusque versus inferiora, sed versus cæteras partes magis aut minus, prout partes illæ magis aut minus à duobus iis extremis distant. Quod cum ita sit, sequitur necessario lineam quamlibet, quæ unam ex his undis ad angulos rectos secat, supra punctum A transire, præter unicam illam quæ horizonti perpendicularis est.

TAB. II. Fig. 5.

Sit B C unda quæ lumen defert ad spectatorem qui in B est, & B D sit recta quæ perpendiculariter undam illam secat. Ergo, cum radius sive linea recta, ex qua judicamus quo in loco sit objectum, nihil aliud sit præter perpendicularem undæ quæ ad oculum pervenit, ut intelligi potest ex iis, quæ superius dicta sunt; manifestum est punctum A visum iri, quasi foret in recta B D, adeoque visum iri altiùs quam re vera est.

Eumdem in modum, si terra est A B, & extremitas atmosphæræ C D, quæ, ut verisimile est, non est superficies perfecte sphærica, quandoquidem novimus aëra eo rariorem fieri quo altior est, quia tunc pauciorem supra se habet aëra à quo prematur; si undæ Solis ita veniant v. g., ut, quamdiu non attigerint atmosphæram

TAB. III. Fig. 1.

C D,

C D, ad perpendiculum à recta A E secentur: eædem undæ, ubi in atmosphæram intrant, debent velocius versus altiores partes progredi quam eas versùs, quæ terræ viciniores sunt. Ita ut, si C A sit unda quæ defert lumen ad spectatorem in A, pars illius C erit magis progressa; & recta A F, quæ secat undam illam ad angulos rectos, determinatque locum apparentem Solis, verget supra Solem verum, qui videretur per lineam A E. Proinde fieri potest ut Sol, qui absque vaporibus non videri deberet, quia linea A E incurrit in rotunditatem terræ, cernatur tamen refractionis ope, per lineam A F. At angulus ille E A F numquam fere major est dimidio gradu, quia tenuitas vaporum undas luminis leviter tantùm immutat. Præterea refractiones non semper omni tempore constantes sunt, præsertim in exiguis altitudinibus duorum aut trium graduum, quod oritur à varia copia vaporum aquosorum, qui è terra attolluntur.

Et hoc in causa est, cur certo tempore corpus aliquod distans lateat pone alterum propius, alio vero appareat, quamvis locus, unde spectatur, idem sit semper. Atque ratio phænomeni illius evidentior fiet, ex iis quæ de curvitate radiorum mox observaturi sumus. Patet ex superius dictis progressum seu propagationem particulæ alicujus undæ luminis, id proprie esse, quod vocamus radium. Radii autem illi, cum sint recti in diaphanis homogeneis, debent curvi fieri in aëre inæqualis penetrabilitatis, quippe qui necessariò sequantur lineam quæ ab objecto ad oculum usque, secat progressiones omnes undarum ad angulos rectos, ut in linea A E B, quod infra probabitur; & linea eadem determinat quænam corpora interposita debeant impedire aut non, quominus videamus objectum. TAB. II. Fig. 5.

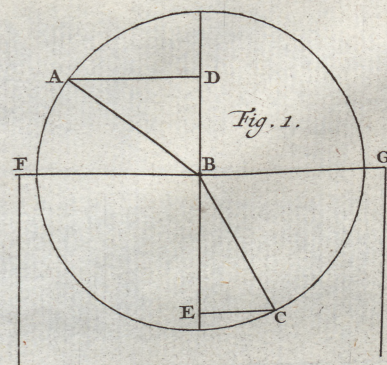
Etsi enim apex turris A videatur in D, attamen non videretur ab oculo B, si turris H interposita foret, quia turris ista curvam A E B secat. Verum turris E, quæ

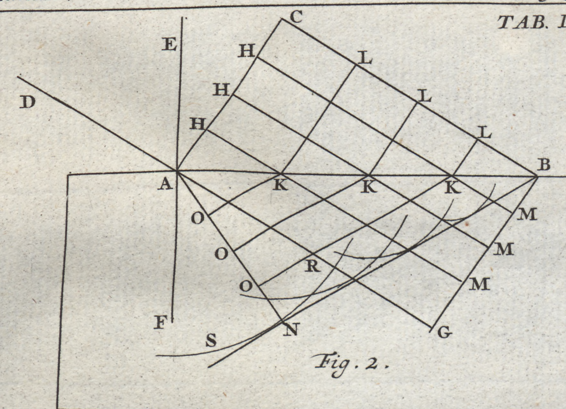
infra hanc curvam eſt, non obſtat quominus videatur apex A. Prout autem aër vicinior terræ, magis condenſatur quam aër ſublimior, curvitas radii A E B major evadit; adeo ut aliquando ſuperior ſit apice E, quod in cauſa eſt cur apex A videatur ab oculo in B; aliquando interrupta ſit ab eadem turri E, quod facit ut idem oculus jam non amplius videat A.

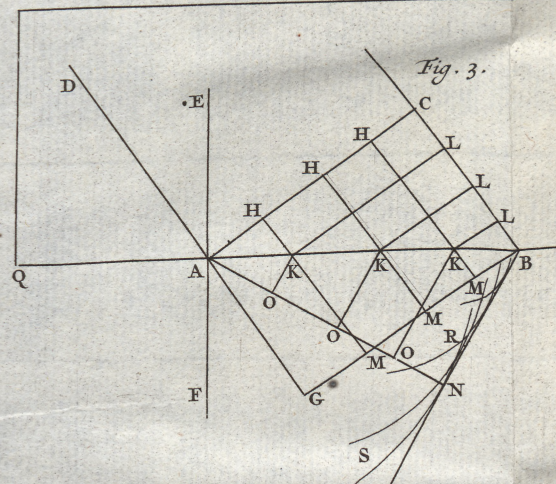
TAB. III. Fig 2. Verùm ut demonſtremus curvitatem hanc iſtius radiorum ex ſuperiori Theoria noſtra, fingamus A B eſſe particulam alicujus undæ luminis, quæ veniat à parte C, quam poſſumus conſiderare tamquam lineam rectam. Ponamus quoque illam perpendicularem eſſe ad horizontem. Cum locus B propior ſit terræ quam locus A, cumque vapores minus craſſi ſint in A quam in B, unda particularis, quæ procedit â puncto A, extenditur per certum quoddam ſpacium A D, dum unda particularis, quæ exſurgit è puncto B, extenditur juxta ſpacium minus B E, & A D, B E horizonti parallelæ ſint. Præterea, poſitis rectis F G, H I & ductis ex innumeris punctis rectæ A B, & terminatis in recta, (vel quæ poteſt conſiderari ut talis) D E, per varias illas lineas exhibeantur variæ penetrabilitates in variis altitudinibus aeris inter A & B; ita ut unda nata è puncto F, ſe extendet per ſpatium F G, undaque, orta è puncto H, per ſpatium H I, dum ea quæ emiſſa eſt ex A extenditur per totum ſpacium A D.

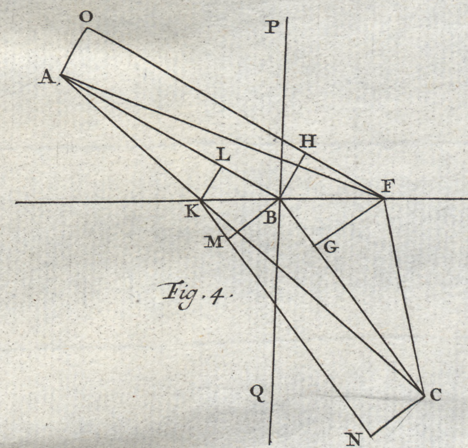
Nunc ſi è centris A, B deſcribantur circuli D K, E L qui exhibeant extenſionem undarum ortarum ex duobus illis punctis; ducaturque recta K L, quæ duos illos circulos tangat: facile patet eandem illam lineam fore tangentem omnium circulorum qui deſcripti ſunt centris F, H, &c. futurumque ut puncta omnia contactûs incidant in partem lineæ illius, quæ eſt inter perpendiculares A K, B L. Ergo recta K L terminabit motus undarum natarum è puncto undæ A B, motusque ille validior erit inter puncta K L, quam alibicumque, eo ipſo inſtanti

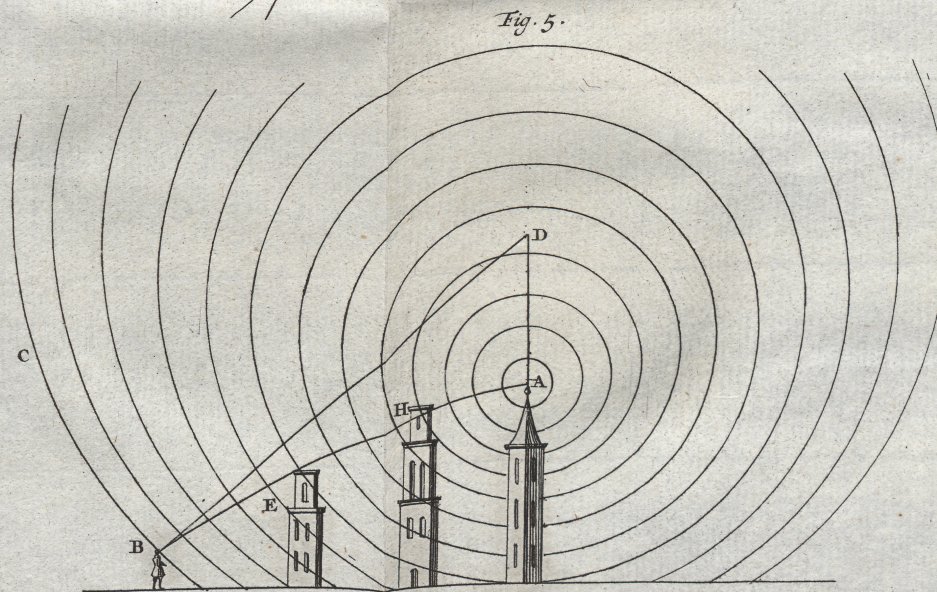
TAB. II.


A
D
Fig. 1.
F
B
G
E
C


E
C
H
H
H
L
L
L
D
A
K
K
K
B
O
O
O
R
M
M
M
F
S
N
G
Fig. 2.


Fig. 3.
D
E
C
H
H
H
L
L
L
Q
A
K
K
K
B
O
O
O
M
M
M
R
F
G
N
S


O
P
A
L
H
F
K
B
M
G
Fig. 4.
Q
C
N


Fig. 5.
D
C
A
H
E
B

ti, quia infinitæ circumferentiæ ad formandam rectam illam concurrunt Idcirco K L futura est propagatio partis undæ A B, juxta ea quæ diximus, ubi de reflexione & refractione vulgari egimus. Apparet autem A K & B L inclinari versus locum, ubi aër minus facilè penetrabilis est; cum enim A K sit longior quam B L, eique parallela, sequitur A B & K L productas concurrere ex parte L. Sed Angulus K rectus est, ergo K A B necessario acutus est, adeoque minor quam D A B. Quod si eadem ratione indagare velimus progressum partis undæ K L, eam reperiemus alio tempore pervenisse in M N, adeo ut perpendiculares K M, L N inclinentur adhuc magis quam A K, B L. Et hinc patet, radium continuari secundum lineam illam curvam, quæ omnes undas ad angulos rectos secat, uti dictum est.

CAPUT V.

De miranda Refractione Crystalli Islandici.

1. ADvehitur huc ex Islandia, Insulâ Maris Borealis ad altitudinem 66. graduum, species Crystalli vel lapidis diaphani valde notabilis ob figuram suam aliasque qualitates, sed inprimis ob miras ejus Refractiones. Earum autem causas eò digniores curiosa indagatione existimavi, quod, hoc unum è corporibus diaphanis, circa radios luminis, consuetas regulas non sequatur; necessitas etiam quædam me impulit, ut ad eam rem animum applicarem, quandoquidem refractionis hujus Crystalli nostram opinionem de refractionibus regularibus funditus evertere videatur; quamvis è contrario illam non parum confirmet, ubi ex meis explicatur principiis. In Islandia reperiuntur plurima ejus Crystalli frusta, quorum quædam ad quatuor aut quinque libras vidi. Sed præterea nascitur quoque in aliis Regionibus, namque ejusmodi lapides habui qui in

Gal-

Galliâ prope Trecas in Campaniâ reperti fuerant, alios qui in Insula Corsica; verum utrique obscuriores erant & in parvis frustulis collecti, ita ut vix animadvertere in eis Phænomenon aliquod refractionis liceret.

2. Prima hujus cognitio, quam publicum inde habuit, debetur Erasmo Bartholino qui Islandicum Crystallum & ejus phænomena descripsit. Nihilo feciùs tamen idem opus aggrediar, tum ut prosim iis qui librum illum non viderunt, tum quia in quibusdam Phænomenis aliquod est discrimen observationes illas inter & meas; perpendique diligentissime proprietates illas refractionis, ut de iis quam certissimus essem, priusquam earum causas indagare susciperem.

3. Si consideretur, quam durus sit facileque fissilis lapis iste, eum potius talcum dixeris quam Crystallum, quippe quem acies ferrea non ægrius dividat quam talcum aut alabastrum, cui gravitate par est.

4. Frusta illius figuram habent parallelopipedi obliqui, unumquodque ex sex lateribus est parallelogrammum, lapisque findi potest secundum tres suas dimensiones, juxta plana parallela duobus ex his lateribus oppositis, imo ita si velis ut sex latera sint Rhombi æquales & similes. Figura hic adjuncta exhibet imaginem frusti ex hoc Crystallo. Anguli obtusi cujusque parallelogrammi, ut anguli C, D, sunt 101 graduum, 52. minutorum, & proinde acuti, ut A & B 78. graduum & 8. minutorum.

TAB.III. Fig. 3.

5. Ex angulis solidis duo oppositi dantur ut C, E, quorum uterque constat tribus angulis planis, obtusis & æqualibus. Cæteri sex constant duobus acutis tertioque obtuso. Hactenus cum Bartholino mihi in omnibus convenit, nisi quod parum à me dissentit in angulorum quantitate. Refert præterea quasdam alias hujus lapidis proprietates; scilicet panno alicui affrictum paleas allicere similesque res leves, succini instar, & adamantis, vitrique, & laccæ sigillaris. Superficiem ejusdem aquâ immersi per

per diem unum aut amplius levorem suum amittere. Et si aqua regia superfundatur ebullitionem oriri, imprimis, ut observavi ipse, si in pulverem minuatur. Animadverti etiam flammæ injectum excandescere, neque tamen ullatenus mutari aut minus pellucere, sed igne violento in calcem verti. Crystallus illa ferè æque diaphana est ac crystallus vulgaris & aqua, nullumque colorem habet. At radii illam aliter permeant, faciuntque admirabiles illas refractiones, quarum causas jam explicare conabor; ad finem tractatus prolaturus conjecturas meas de formatione & figurâ extraordinariâ hujus Crystalli.

6. In cœteris corporibus diaphanis quæ novimus, una est duntaxat simplexque refractio; in hâc vero duæ sunt diversæ. Unde fit ut objecta, quæ per hanc videntur, imprimisque ea, quæ ipsi immediate applicata sunt, videantur duplicia; & radius Solis, incidens in unum è lateribus, bifariam dividatur, sicque Crystallum pervadat.

7. Alia etiam lex generalis in universis corporibus diaphanis est, ut Radius, qui cadit perpendiculariter in superficiem eorum rectâ transeat nullamque refractionem patiatur, & radius obliquus semper frangatur. Verum in hac Crystallo radius perpendicularis refringitur, & quidam radii obliqui hanc rectâ permeant.

8. Ut autem particularius hæc explicemus phænomena, sit rursus frustum ejusdem Crystalli A B F E, & dividatur angulus obtusus A C B, unus è tribus, quibus constat angulus solidus æquilateralis C, in duas partes æquales per rectam C G. Concipiamus deinde Crystallum secari à plano quodam, quod per lineam illam & latus C F transeat, quodque necessario perpendiculare erit ad superficiem A B, & sectio illius in Crystallo faciet parallelogrammum G C F H. Sectionem hanc sectionem præcipuam crystalli vocabimus. TAB III. Fig 4.

9. Si operiatur superficies A B, & dumtaxat relinquatur parva apertura in puncto K, sumpto in recta C G,

Solique ita exponatur ut radii in superficiem perpendiculariter incidant; radius I K dividetur bifariam in puncto K, ejusque altera pars rectâ perget per K L, altera secedet per rectam K M quæ est in plano C G H F, & quæ facit cum K L angulum circiter sex graduum & quadraginta minutorum tenditque ad latus anguli solidi C: &, exeundo ex altera parte Crystalli, redibit per M Z parallelam I K. Quemadmodum autem, per refractionem illam insuetam, punctum M cernitur per radium fractum M K I, quem suppono ire ad oculum I, ita necesse est punctum L, per eamdem refractionem, cerni per radium fractum L R I: ita ut L R sit quasi parallela M K, si distantia oculi K I ponatur esse maxima. Ergo punctum L videtur, quasi esset in recta I R S; sed videtur quoque, ex refractione consueta, in recta I K: necessario igitur judicatur duplex. Eâdem ratione, si L sit exiguum foramen in papyro aut alia quavis materiâ, quæ crystallo applicita fuerit, crystallumque versus lucem collocetur, duo videre erit foramina tanto à se invicem longinquiora, quanto crassior erit Crystallus.

10. Rursus si ita colloces crystallum ut radius incidens Solis, N O, quem sumo esse in plano continuato G C F H, faciat ad C G Angulum 73. graduum cum 20. minutis, proindeque sit fere parallelus lateri C F, quod facit cum F H angulum 70. graduum cum 57. minutis, ex calculo, quem infra ponam; in puncto O dividetur in duos radios, quorum alter rectâ perget per O P quæ ipsi N O in directum jacet, eodemque modo ex altero latere crystalli egredietur nec se ullo pacto franget: at contra alter frangetur vergetque per O Q. Ubi animadverti oportet peculiare esse plano per G C F planisque ei parallelis, ut radii omnes incidentes, qui sunt in uno ex his planis, in eo adhuc sint, posteaquam crystallum intrârunt factique sunt duplices; quod aliter fit in radiis aliorum

rum planorum, quæ cryſtallum ſecant, ut deinceps probabimus.

11. Hoc animadverti primum ex his aliisque experimentis, ex duabus illis diverſis refractionibus, quas radius patitur hâc in cryſtallo, alteram ad regulas ordinarias accommodatam eſſe, quò pertinent radii K L & O Q. Idcirco priorem hanc ab altera diſtinxi, eamque diligentiſſime per exactas obſervationes dimenſus ſum; unde inveni proportionem ejus, conſideratam in ſinubus angulorum quos facit radius incidens & refractus cum perpendiculari, eſſe præciſe ut quinque ad tria, quod obſervaverat quoque Bartholinus; adeoque illam multo majorem eſſe quam cryſtalli rupis aut vitri, quæ eſt fere trium ad duo.

12. Modus autem faciendi easdem obſervationes quam exactiſſime eſt hujusce modi. Tabulæ lævigatæ applicetur charta in qua deſcribas lineam nigram A B, aliasque duas, quæ iſtam ſecent ad angulos rectos C E D, K M L, à ſe invicem magis aut minus remotas, prout radium magis aut minus obliquum examinare deſideras. Deinde cryſtallus debet poni in interſectione E, ita ut linea A B conveniat cum ea, quæ æqualiter dividit angulum obtuſum ſuperficiei inferioris, aut cum alia quavis linea parallela. Tunc ſi oculum directè colloces ſupra lineam A B, tantum illa apparebit ſimplex; & obſervabis partem illius trans cryſtallum viſam, cum partibus ejusdem, quæ extrinſecùs apparent, in lineâ rectâ concurrere. At linea C D videbitur duplex, eamque facile diſtingues imaginem, quæ à fractione vulgari oritur; inde quia nempe tibi utroque oculo aſpicienti videbitur alterâ elevatior: vel inde, quod ſi cryſtallum plurimis modis in papyro vertas, ea tamen firma ſemper manebit, cum altera imago moveatur, & tota circumvolvatur. TAB. III. Fig. 5.

Oculus deinceps collocetur in I (manendo ſemper in plano perpendiculari per A B) adeo ut videat imaginem

lineæ C D, ortam à refractione vulgari, lineam rectam conficere cum reliqua parte ejus lineæ, quæ extra cryſtallum eſt. Si tunc notes in ſuperficie cryſtalli punctum H, ubi videtur interſectio E, punctum illud directe erit ſupra E. Poſtremo retrahatur oculus verſus O, ſemper in plano perpendiculari per A B, ita ut imago lineæ C D, orta à refractione conſueta, videatur unicam formare rectam cum linea K L, viſâ absque refractione; & notetur in cryſtallo punctum N, ubi videtur punctum interſectionis E.

13. Tunc cognoſces longitudinem poſitionemque linearum N H, E M, & H E quæ eſt cryſtalli craſſitudo; quibus lineis ſeorſim deſcriptis in plano, junctisque N E, & N M, quæ ſecat H E in P, proportio refractionis erit ea quæ eſt E N ad N P, quia nempe lineæ illæ ſunt inter ſe, ut ſinus angulorum N P H, N E P, qui æquales ſunt iis quos radius incidens O N, ejusque refractio N E faciunt cum perpendiculari ad ſuperficiem. Proportio autem illa, ut jam dixi, eſt ſatis præcisè ut quinque ad tria, eademque ſemper in qualibet radii incidentis inclinatione.

14. Eâdem obſervandi ratione uſus ſum in examinanda ejusdem cryſtalli refractione irregulari inſolitâve. Invento enim puncto H, & notato, directe, ut dictum eſt, ſupra punctum E, obſervavi apparentiam lineæ C D, quæ per refractionem inſolitam formatur; & , oculo ita collocato in Q, ut apparentia illa lineam rectam conficeret cum K L, viſâ absque refractione; inveni triangula R E H, R E S, ac proinde angulos R S H & R E S, quos radius incidens & refractus cum perpendiculari faciunt.

15. Verùm repperi, hac in refractione, rationem E R ad R S non conſtantem eſſe, ut in refractione vulgari; ſed variam eſſe pro varia radii incidentis inclinatione.

16. Hoc etiam animadverti quod, cum Q R E faceret lineam rectam, id eſt, cum radius incidens cryſtallum intraret nec frangeretur (quod agnovi inde, quia tunc punctum E, viſum per refractionem extraordinariam, apparerer.

reret in linea C D visa sine refractione) hoc inquam animadverti quod angulus Q R G esset 73. graduum cum 20. minutis, ut jam observatum est, adeoque, quod non sit radius lateri crystalli parallelus, qui eam lineâ rectâ transit absque refractione, ut existimavit Bartholinus; quandoquidem illius inclinatio est dumtaxat 70. graduum cum 57. minutis, ut suprà diximus. Quod notandum est, ne frustra laboretur in indaganda causa proprietatis singularis hujus radii, in ejus parallelismo, ad dicta latera.

17. Tandem cum ulterius pergerem in observationibus, ut investigarem hujus refractionis naturam, cognovi illam juxta notabilem sequentem regulam semper fieri. Seorsim describatur parallelogrammum G C F H factum a præcipua sectione crystalli quam modo determinavimus. Repperi quod, ubi inclinationes duorum radiorum ab oppositis partibus profectorum æquales sunt v. g., V K, S K, semper eorum refractiones K X & K T occurrunt lineæ rectæ fundi H F ita, ut puncta X & T æqualiter distent à puncto M, in quod incidit refractio radii perpendicularis I K: quod locum quoque habet in refractionibus cæterarum sectionum hujus crystalli. Verum antequam aggrediamur illas, quæ habent etiam alias proprietates peculiares, causas superiorum phænomenorum indagasse juvabit. TAB. III. Fig. 6.

Ubi explicueram refractionem diaphanorum vulgarium, ex emanatione sphærica luminis, ut supra, memet iterum applicui ad examinandam hujusce crystalli naturam, quæ antea plane me fugerat.

18. Quandoquidem duæ erant diversæ refractiones, concipiebam duas quoque esse emanationes diversas undarum luminis, quarum altera effici posset in materia æthera per corpus crystalli diffusa. Quæ materia, cum multo abundantior esset quam materia particularum crystalli ipsius, efficiendæ transparentiæ sola apta erat ex ante explicitis; tribuique huic emanationi undarum refractionem

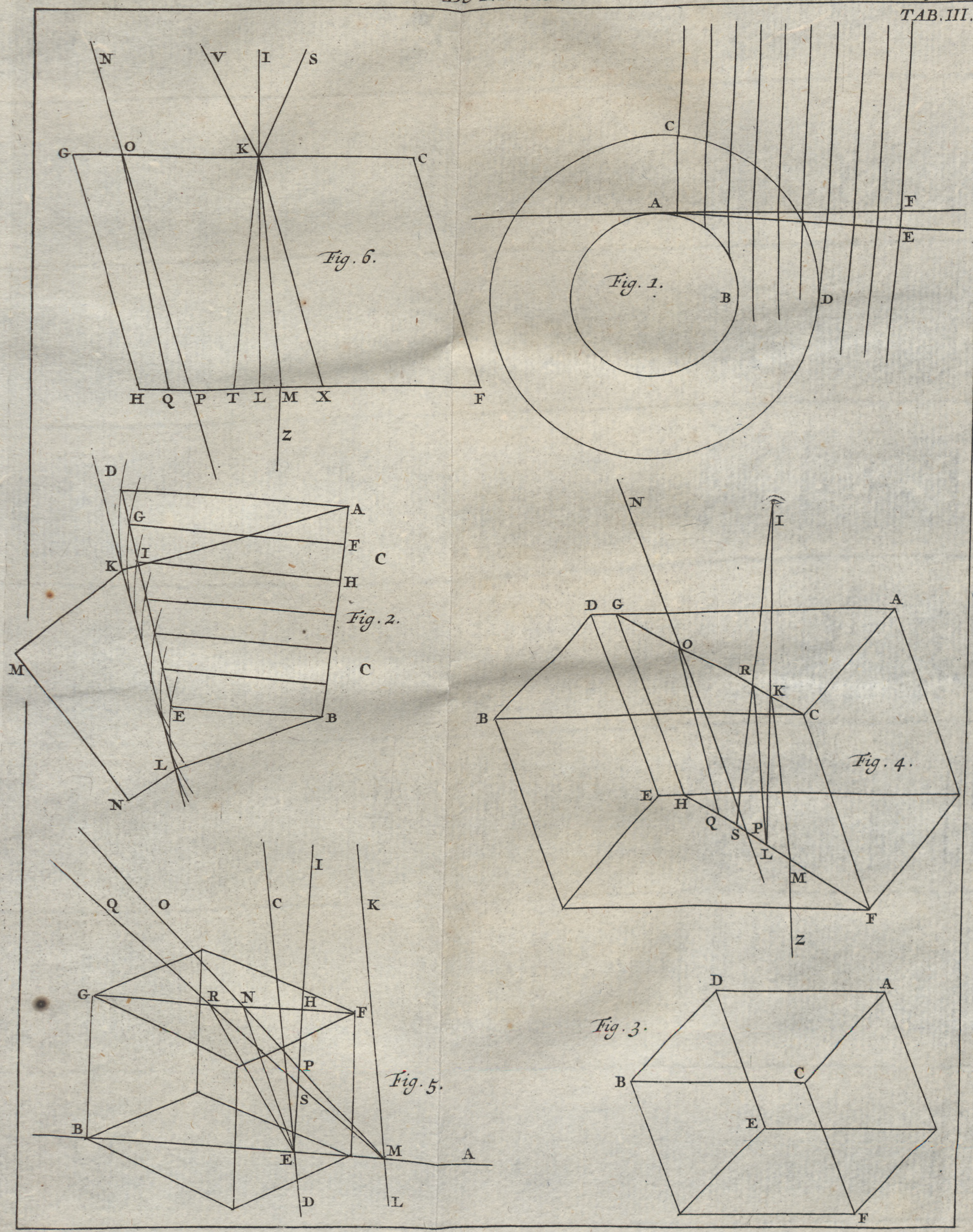
regularem cryſtalli, poſito undas illas ut ordinario ſphæricas eſſe; lentiusque intra cryſtallum extendi quam extrinſecus, unde refractionem oriri probavi.

19. Quod pertinet ad alteram emanationem unde irregularis refractio deberet oriri, tentare libuit quid proficerent undæ ellipticæ ſeu potius ſphæroideæ, quas poſui ſeſe indifferenter extendere, tum in materia ætherea per cryſtallum diffuſa, tum in particulis cryſtalli ipſius, ex ultima mea methodo explicandæ pelluciditatis. Videbatur mihi diſpoſitio vel ſitus regularis particularum illarum facere poſſe ut undæ figuram ſphæroidem induerent (cum ad id ſatis eſſet, ſi motus ſucceſſivus luminis paulo citius in unam partem quam in aliam extenderetur) nec fere dubitabam quin cryſtallus hæc ita facta eſſet particulisque conſtaret æqualibus & ſimilibus, quandoquidem haberet figuram anguloſque menſuræ cujusdam certæ conſtantisque, circa quas particulas earumque formam & diſpoſitionem conjecturas meas in fine tractatus proponam, ut & quædam, quæ illas confirment Experimenta.

20. Quam autem finxeram duplicem luminis emanationem, ea probabilior mihi viſa eſt, poſt certum quoddam phænomenon cryſtalli vulgaris, quod, cum formâ hexagonâ creſcat, videtur quoque conſtare particulis certæ figuræ & certo ordine diſpoſitis. Illud autem erat, quod in illâ etiam cryſtallo duplex eſſet refractio, ut in cryſtallo Iſlandicâ, quanquam evidens minus. Etenim cum plura fruſta incidi curaſſem in ſpeciem priſmatum læviſſimorum, idque per diverſas ſectiones, obſervavi in ſingulis, per quæ aut candelæ flammam aut plumbum vitrorum in feneſtris conſpiciebam, omnia videri duplicia, quanquam imagines paululum tantum à ſe invicem diſtabant. Unde perſpexi cur corpus illud adeo pellucidum adeo inutile eſt in Teleſcopiis paulo longioribus.

21. Verum duplex illa refractio, ex meâ Theoriâ ſupra ſtabilitâ poſtulare videbatur duplicem emanationem unda-

rum,


Fig. 6.
N V I S
G O K C
H Q P T L M X F
Z
Fig. 1.
C A F E B D
Fig. 2.
D G A F C I K H M C E B L N
Fig. 4.
N I D G A O R K B C E H Q S P L M F Z
Fig. 5.
Q O C I K
G R N H F P S B E M A D L
Fig. 3.
D A B C E F

rum, earumque sphæricarum (quia utraque refractio regularis est) quarum hæ illis forent paulò lentiores. Etenim exinde phænomenon illud modo valde naturali explicatur, positis materiis, ut in crystallo Islandico feci, quæ pro vehiculo undis illis inserviunt. Itaque minus dubitavi postea duplicem illam emanationem undarum in eodem corpore admittere. Cum autem objicere quis posset, si utraque illa Crystallus constaret partibus æqualibus certæ figuræ & certo ordine dispositis, fore ut interstitia, quæ inter eas particulas relicta sunt, quæque continent materiam æthereram, non sufficerent ad undas luminis, quas ibi posui transmittendas. Difficultatem illam removi, considerando nimirum particulas illas utpote texturæ rarissimæ, aut constantes particulis multo tenuioribus, quas inter materia ætherea fluit liberrime; id, quod sequitur etiam ex iis quæ demonstravimus antea de exigua quantitate materiæ quâ constant corpora.

22. Positis igitur undis illis sphæroidibus præter sphæricas, considerare incoepi utrum ad explicanda refractionis irregularis phænomena conducere possent, & quî ex illis ipsis phænomenis figuram positionemque sphæroidum definire possem; quod mihi ex sententia successit hunc in modum.

23. Primum consideravi undarum sic formatarum effectum respectu radii, qui incidit perpendiculariter in superficiem planam corporis alicuius diaphani, in quo ita se extenderent. Posui A B pro loco aperto superficiei; &, cum radius perpendicularis ad planum, & procedens à lumine maxime distanti, nil aliud fit ex theoria nostra, præter incidentiam particulæ undæ ad hoc planum parallelæ; posui rectam R C, parallelam & æqualem A B, esse portionem undæ alicujus luminis, cujus puncta infinita R H, *h* C occurrunt superficiei A B, in punctis A K, *k* B. Ergo, loco undarum particularium hemisphæricarum, quæ in vulgari corpore diaphano deberent se extendere è singulo TAB. IV. Fig. 1.

gulo quoque ex his ultimis punctis, ut supra explicuimus ubi de refractione actum est, deberent hîc esse undæ hemisphæroides, quarum axes sive magnas diametros posui esse obliquas ad planum A B, ut est A V semi axis, aut semi magna diameter sphæroidis S V T, quæ repræsentat undam particularem ortam à puncto A, postquam unda R C pervenit in A B. Dico autem vel axem vel magnam diametrum, quia nimirum ellipsis eadem S V T spectari potest, tanquam sectio sphæroidis alicujus, cujus axis est A Z perpendicularis ad A V. Verumtamen neutro jam determinato, spectabimus sphæroides illas in iis dumtaxat sectionibus, quæ faciunt ellipses in plano hujusce figuræ. Sumpto autem certo quodam temporis spatio; intra quod à puncto A sese extendit unda S V T, necesse erat, ut intra idem tempus, à cæteris omnibus punctis K *k* B efformarentur undæ similes & similiter positæ ac S V T. Communis verò tangens N Q omnium illarum semi-Ellipsium erat, ex theoria nostra superiore, propagatio undæ R C, in corporibus diaphanis propositis: quia nempe in linea illa terminatur, eodem instanti, motus quem effecit unda R C, incidendo in A B, ibique motus multo copiosior est quam alibicumque: cum scilicet formetur ex arcubus infinitis Ellipsium quarum centra sunt secundum lineam A B.

24. Apparebat autem tangentem illam communem N Q esse omnino parallelam ipsi A B, cui tamen non directè erat opposita, cum lineis A N, B Q contineretur, quæ sunt diametri conjugatæ ellipsium illarum quæ habent A & B pro centris, respectu diametrorum quæ sunt in recta A B. Ita intellexi, quod difficillimum mihi visum fuerat, nempe quo pacto radius perpendiculariter incidens in superficiem aliquam posset refringi, quando ingrederetur corpus diaphanum; videns quod unda R C à foramine B orta extenderet se usque inter parallelas A N, B Q, ipsâ semper tamen parallelâ manente ad A B: ita ut lumen

lumen hîc non diffundatur per lineas perpendiculares ad ſuas undas, velut in refractione vulgari fit, ſed lineæ illæ undas oblique ſecent.

Inveſtigans dein cujusmodi poſſent eſſe ſitus formaque ſphæroidum illarum in cryſtallo, conſideravi unumquodque ex ſex lateribus easdem plane refractiones efficere. Igitur ſumpto iterum parallelopipedo A F B, cujus angulus ſolidus obtuſus, comprehenſus tribus angulis planis æqualibus, eſt C, ſuppoſitis deinde in eo tribus præcipuis ſectionibus, quarum prima perpendicularis eſt ad faciem, D C tranſitque per latus C F, ſecunda perpendicularis eſt ad faciem B F, tranſitque per latus C A, tertia demum perpendicularis eſt ad faciem A F, tranſitque B C; noveram refractiones radiorum incidentium, qui pertinent ad hæc tria plana, plane ſimiles eſſe. At nullus omnino poterat eſſe ſitus ſphæroidis quæ eamdem poſſet habere relationem cum tribus illis ſectionibus, præter unam hanc ſphæroidem cujus axis eſſet quoque axis anguli ſolidi C. Inde comperi axem illius anguli, ſcilicet rectam illam quæ à puncto C tranſibat cryſtallum cum inclinatione æquali ad latera C F, C A, C B; eſſe lineam illam quæ determinat poſitionem axium omnium undarum ſphæroidearum quæ concipiebantur oriri ex aliquo puncto intra aut in ſuperficie cryſtalli ſumpto: cum omnes ſphæroides illæ deberent eſſe ſimiles & habere axes parallelos inter ſe. Tab. IV. Fig. 2.

26. Conſiderans poſthac planum unius ex tribus his ſectionibus, ſcilicet illius quæ eſt per G C F, cujus angulus C eſt 109. graduum cum 3. minutis, quandoquidem F erat ſupra 70. graduum cum 57. minutis, imaginansque undam ſphæroidem circa centrum C; noveram, ex iis quæ modo explicui, illius axem debere eſſe eodem in plano, cujus axeos dimidiam partem notavi per C S in altera hac figura: & quærens, ex ſupputatione (quam cum aliis huic tractatui ſubjiciam) angulum G C S, comperi illum eſſe 45. graduum cum 20. minutis. Tab. IV. Fig. 3.

27. Ut deinceps noscerem formam illius sphæroidis, id est proportionem semidiametrorum C S, C P, sectionis illius ellipticæ, quæ sunt ad se mutuo perpendiculares, consideravi punctum M, in quo Ellipsis tangitur à recta F H parallela C G, debere esse ita situm, ut C M cum perpendiculari C L faceret angulum 5. graduum cum 40. minutis; Quoniam, hoc posito, ellipsis illa satisfaciebat iis, quæ diximus de refractione radii perpendicularis ad superficiem C G, qui secedit à perpendiculari C L per eundem angulum. Quo posito, factâque C M 100000. partium, reperi calculo semidiametrum C P ex 105032. constare, & dimidium axem C S ex 93410, quæ ratio est fere ut 9. ad 8. adeo ut sphærois illa esset iis quæ similes sunt sphæræ compressæ, productæ per gyrationem ellipseos circa suum parvum diametrum. Reperi etiam C G, semidiametrum parallelam tangenti M L, esse 98779. partium.

28. Unde progressus ad investigandum quasnam refractiones radii incidentes obliqui debeant facere, ex hypothesi undarum illarum sphæroidearum, vidi refractiones illas pendere à proportione velocitatis quæ est inter motum luminis extra crystallum in æthere, motumque ejus intra

TAB. IV. Fig. 4. eandem. Nam, posito proportionem illam ejusmodi esse ut, dum lumen in crystallo facit sphæroidem G S P qualem modo dixi, extra crystallum idem faciat sphæram cujus semidiameter æqualis sit lineæ N, quam posthac determinaturi sumus; ratio inveniendæ refractionis radiorum hæc est. Sit talis radius R C qui incidat in superficiem K C, fiat C O perpendicularis ad R C, & in angulo K C O disponatur O K, quæ æqualis sit N & perpendicularis ad C O. Deinde ducatur & K I quæ tangit Ellipsim G S P, & à puncto contactûs I jungatur I C, quæ erit refractio quæsita radii R C. Cujus patebit demonstrationem plane similem esse illi quâ usi sumus in explicanda refractione vulgari. Etenim refractio radii R C nil aliud est præter progressum partis C undæ C O continuatæ in crystallo.

At

At partes H ejusdem undæ, dum O pervenit in K, progressæ erunt ad superficiem C K per rectas H x, & produxerint in crystallo suas undas hemisphæroideas è centris x, easque similes & similiter positas cum hemisphæroide G S P g; quarum & magnæ & parvæ diametri habebunt eamdem rationem ad lineas x v (continuationes linearum H x ad K B parallelam ad C O) quam diametri sphæroidis G S P habent ad lineam C B aut N. Et facile est videre, quod communis omnium illarum sphæroidum tangens, quæ hìc per ellipses repræsentantur, erit recta I K, quæ idcirco erit propagatio undæ C O, ut & punctum I puncti C, juxta ea quæ demonstrata sunt, ubi de Refractione vulgari actum est.

Quod attinet ad inventionem puncti contactûs I, notum est reperiendam esse, ad lineas C K & C G, tertiam proportionalem C D, ducendamque D I parallelam ad C M antea determinatam quæ est diameter conjugata ad C G; tunc enim, si ducas K I tangit ellipsim in I.

29. Quemadmodum autem invenimus C I, refractionem radii R C, sic inveniemus quoque C i, refractionem radii r C qui venit ab opposita parte; modo fiat C o perpendicularis ad r C, reliquumque ut supra.

Ubi liquet, si radius r C æqualiter inclinetur cum R C, lineam C d futuram necessario æqualem C D, quia C k, C K sunt æquales, ut & Cg, C G. Et consequenter I i secabitur in E in partes æquales à linea C M cui d i & D I parallelæ sunt. Et quoniam C M est diameter conjugata ad C G, sequitur, quod i I parallela erit ad g G. Proinde si producantur refractiones C i & C I donec occurrant tangenti M L in T & in t, distantiæ M T & M t æquales quoque erunt. Et sic perfecte explicatur ex hypothesi nostra, superius memoratum phænomenon: scilicet quod si sint duo radii æqualiter inclinati, & à lateribus oppositis præcedentes, ut hic R C, r C, refractiones eorum æqualiter secedunt à lineâ, quam sequitur refractio radii perpendicularis considerando has deviationes in parallela ad superficiem crystalli.

30. Nunc vero ut reperiatur longitudo lineæ N, respectu linearum C P, C S, C G determinari hæc debet ex observationibus refractionis irregularis, quæ fit in ista sectione crystalli; exinde comperio rationem N ad G C paullo minorem esse quam 8. ad 5. Et cum ad alia etiam attendam phænomena, de quibus postea differemus, pono N constare ex 156962. partibus quarum semidiameter C G invenitur habere 98779, unde hæc ratione est 8 ad $5\frac{1}{29}$. Proportio vero illa quæ est inter lineam N & C G dici potest proportio refractionis, quemadmodum in vitro proportio 3. ad 2., uti manifestum erit, ubi explicuero summatim quâ ratione methodo præcedenti refractiones irregulares inveniri queant.

Tab. IV. Fig. 5. 31. Positis igitur iisdem quæ supra, scilicet superficies crystalli g G, Ellipsis G Pg, & linea N; ac C M refractio radii perpendicularis F C, à quo secedit 6. gradibus & 40. minutis, sit nunc quicunque radius R C cujus invenienda sit refractio.

A centro C semidiametro C G describatur circumferentia g R G, quæ Radium R C secat in R, & sit R V perpendicularis ad C G. Tunc semper, veluti linea N ad C G, ita sit C V ad C D; & ducatur D I parallela ad C M, secans Ellipsin g M G in I. Tunc, si jungas C I, erit illa refractio quæsita radii R C, quod demonstratur hunc in modum.

Sit C O perpendicularis ad C R, & in angulo O C G collocetur O K æqualis ipsi N & perpendicularis ad C O; ducaturque recta K I, quæ si demonstratur contingere Ellipsim in I, evidens erit ex superioribus dictis C I refractionem esse radii R C. Cum autem angulus R C O sit rectus, facile patet triangula rectangula R C V & K C O similia esse. Quemadmodum igitur C K ad K O ita R C ad C V. At K O æqualis est lineæ N, & R C lineæ C G; ergo ut C K ad N, ita erit C G ad C V. Atqui veluti N ad C G, ita est, per constructionem, C V ad C D.

CD. Ergo ut C G K ad C G, ita C G ad C D. Quoniam autem D I parallela est ad C M diametrum conjugatam ad C G, sequitur quod K I tangat Ellipsim in I, quod demonstrandum supererat.

32. Patet igitur, quemadmodum in refractione vulgarium diaphanorum certa quædam est proportio constans inter sinus angulorum quos cum perpendiculari faciunt radius incidens & refractus, ita proportionem hic reperiri inter C V & C D aut I E; sive, quod idem est, inter sinum anguli quem facit radius incidens cum perpendiculari, & applicatam in Ellipsi interceptam inter refractionem illius radii & diametrum C M. Etenim ratio C V ad C D semper, ut dictum est, eadem est ac ratio N ad semidiametrum C G.

33. Addam insuper, antequam ad alia pergam, comparatis simul refractione regulari hujusce crystalli & ejusdem irregulari refractione, hoc observatu dignum esse quod, si A B P S est sphærois juxta quam lumen in crystallo diffundatur certo temporis spatio (quæ diffusio, ut jam dictum est, ad refractionem irregularem conducit) tunc sphæra inscripta B V S T sit extensio, eodem temporis spatio, luminis quod ad refractionem vulgarem conducit. TAB V. Fig. 1.

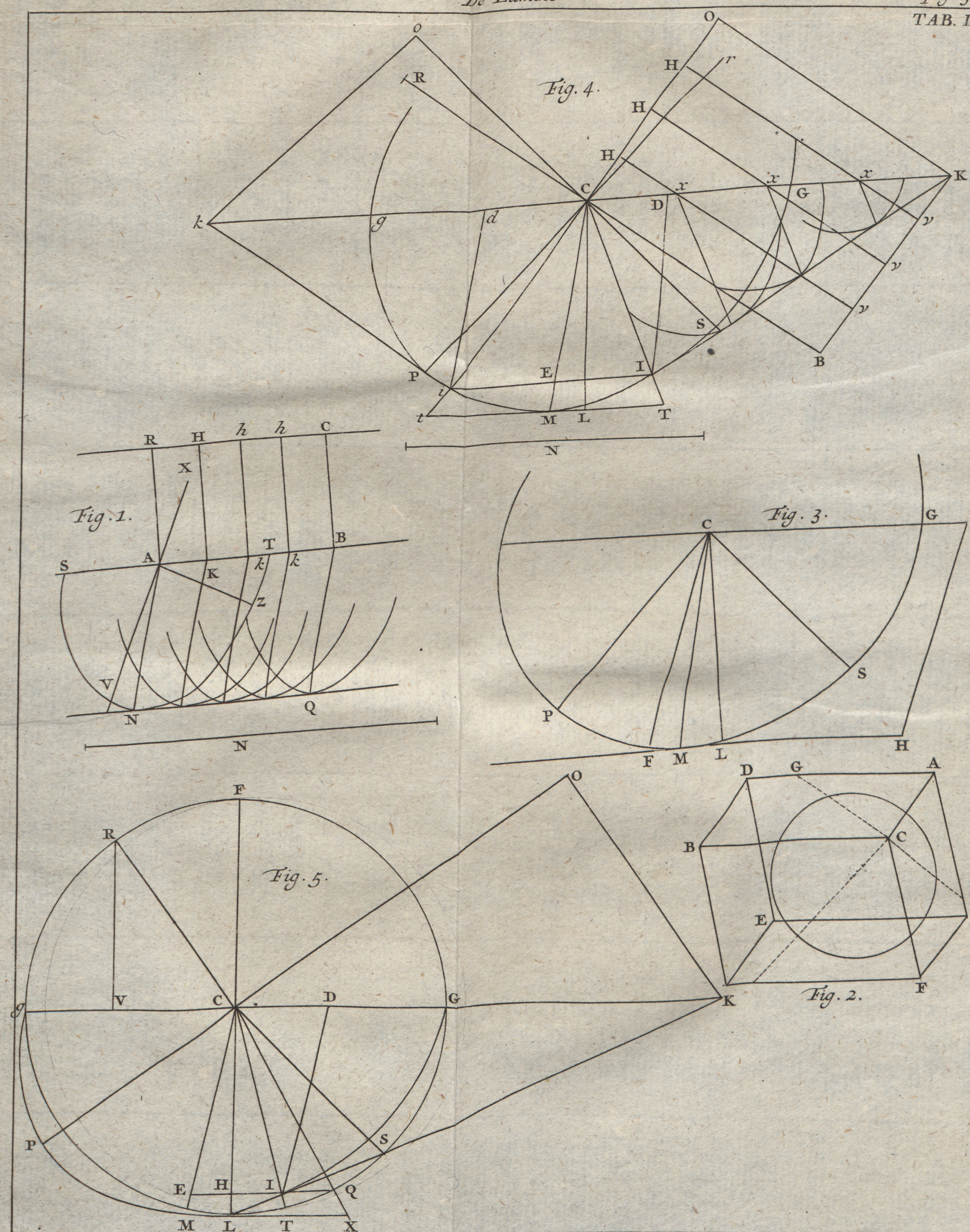
Etenim jam antea diximus quod, cum linea N sit radius undæ i sphæricæ luminis in aëre, dum in crystallo ea extenditur per sphæroidem A B P S, ratio N ad C H sit ut 156962. ad 93410. Sed & diximus proportionem refractionis vulgaris esse ut 5. ad 3. id est, cum N sit radius undæ alicujus sphæricæ luminis, in aëre, extensionem illius in crystallo facere eodem temporis intervallo sphæram unam, cujus radius esset ad N ut 3. ad 5. Atqui 156962 est ad 93410 ut 5 ad 3 minus $\frac{1}{4}$. Itaque parum & forte nil abest quin sit sphæra B V S T, quam facit lumen pro refractione regulari in crystallo, dum ibidem sphæroidem B P S A efficit pro refractione irregulari, & dum sphæram radio N in aëre extra crystallum.

Etiamsi igitur sint, ut asseruimus, duæ diversæ extensiones luminis intra crystallum, apparet tamen alteram alterâ velociorem, dumtaxat in sensu perpendicularium ad axim B S sphæroidis; altero vero sensu, id est in sensu parallelarum eidem axi B S, qui est etiam axis anguli obtusi crystalli, eandem esse utriusque velocitatem.

Tab. V. Fig. 2. 34. Probare nunc aggrediar, positâ eâ quam diximus refractione, inde sequi insigne illud phænomenon radii, qui, incidens oblique in superficiem crystalli, illam penetrat sine refractione. Enim vero, positis iisdem quæ prius, radius R C de quo supra diximus, faciat in superficie *g* G angulum R C G 73. graduum cum 20. minutis inclinatum eamdem in partem ac crystallus. Si, ex ratione ante jam explicata, quæritur illius refractio C I, reperietur facere præcise rectam lineam cum R C; adeoque radius ille neutiquam à via sua aberrat, juxta experientiam: quod ex supputatione nostra sic probo.

Si C G aut C R sint, ut supra, 98779, C M 10000, angulus R C V 73. graduum cum 20. min., C V erit 28330. Et quoniam C I est refractio radii R C, proportio C V ad C D est, ut 156962 ad 98779, scilicet N ad C G: ergo C D est 17828. Veluti autem quadratum C G ad quadratum C M, ita rectangulum *g* D G ad quadratum D I; ergo D I seu C E erit 98353. Verum ut C E ad E I, ita C M ad M T, quæ igitur erit 18127. Quâ additâ ad M L quæ est 11609 (scilicet sinus anguli L C M 6 graduum cum 40. minutis, positâ C M 100000 pro radio) exsurgit L T 29736, quæ est ad L C 99324, veluti C V ad V R, id est ut 29938, tangens complementi anguli R C V 73 graduum cum 20. min. ad tabularum radium. Unde colligitur R C I T esse lineam rectam, quod demonstrandum erat.

35. Patebit præterea radium C I, egrediendo per superficiem oppositam crystalli, debere rectâ pergere, ex demonstratione sequenti, quâ probatur reciprocationem refra-


Fig. 4.
O R H H H r H C D x x x G K k g d y y y y S B P E I t M L T N
Fig. 1.
R H h h C X S A K T k k B z V N Q N
Fig. 3.
C G S P F M L H
Fig. 5.
F R O g V C D G K P S E H I Q M L T X
Fig. 2.
D G A B C E K F



fractionum hocce in lapide non minus observari quam in reliquis corporibus diaphanis. Scilicet, si radius R C, incurrendo in superficiem crystalli C G, rumpitur in C I; radius C I, qui egreditur per superficiem oppositam & parallelam crystalli, quam pono esse I B, habebit refractionem suam I A parallelam radio R C.

Positis rursum iisdem quæ supra, id est, si C O, quæ perpendicularis est ad C R, repræsentet portionem undæ cujus continuatio intra crystallum sit I K; adeo ut pars C continuata fuerit per rectam C I, dum O venit in K. Quod si nunc sumamus alterum temporis spatium æquale priori, pars K undæ, I K, intra alterum illud temporis spatium, progressa erit per rectam K B æqualem & parallelam C I; quoniam quælibet pars undæ C O, perveniendo ad superficiem C K, debet pergere intra crystallum veluti & pars C: atque eodem tempore, efformabitur è puncto I in aëre unda sphærica particularis, cujus semidiameter I A æqualis est K O, quoniam K O æquali temporis intervallo percursa fuit. Eodemque modo, si consideretur quodlibet aliud punctum undæ I K, uti *h* progredietur per *h m* parallelam ad C I, & incurret in superficiem I B, dum punctum K percurrit K *l* æqualem *h m*: dumque istud conficit reliquum lineæ *l* B, efformata erit à puncto *m* unda particularis, cujus semidiameter *m n* habebit eam rationem ad *l* B ac I A ad K B. Unde manifestum est undam illam cujus semidiameter est *m n*, alteramque cujus semi diameter est I A, habituras eamdem tangentem B A. Eumdemque in modum reliquæ undæ particulares sphæricæ quæ factæ erunt extra crystallum ex impulsione punctorum omnium undæ I K in superficiem ætheris I B. Ergo præcisè tangens B A erit, extra crystallum, continuatio undæ I K, ubi pars K advenit in B. Ac proinde I A, perpendicularis ad B A, erit refractio radii C I, egrediendo è crystallo. Liquet autem I A esse parallelam radio

TAB. V. Fig. 3.

inci-

incidenti R C, cum I B æqualis sit C K, & I A æqualis K O angulique A & O recti.

Patet ergo, quod ex hypothesi nostrâ reciprocatio refractionum reperitur hocce in crystallo, quemadmodum in corporibus ordinariis diaphanis, quod reverâ observationes mirificè confirmant.

36. Nunc vero ad considerandas cæteras sectiones crystalli transeo & ad refactiones, quæ in iis producuntur, à quibus plurima, ut videbitur, pendent insignia phænomena.

TAB. V. Fig. 4. Sit parallelopipedum crystalli A B H, & superficies superior A E H F rhombus perfectus, cujus anguli obtusi æqualiter divisi sint per rectam E F, & anguli acuti per rectam A H perpendicularem ad F E.

Sectio, quam hactenus consideravimus, ea est quæ transit per lineas E F, E B, & quæ simul secat planum A E H F ad angulos rectos; cujus refractiones hoc habent commune cum refractionibus diaphanorum vulgarium, quod planum, ductum per radium incidentem secansque ad angulos rectos superficiem crystalli, idem est in quo reperitur quoque radius refractus. Verum refractiones cujuslibet alterius sectionis hujusce crystalli hoc admirabile prorsus habent Phænomenon, quod radius fractus egreditur semper è plano radii incidentis, perpendicularis ad superficiem, & se convertit ad latus inclinationis crystalli. Cujus phænomeni causas explicabimus primum in sectione per A H, simulque ostendemus quî possint in ea refractiones, ex hypothesi nostrâ, determinari. Sit igitur in plano quod transit per A H, & perpendiculare est ad planum A F H E, radius incidens R C; ac reperienda refractio illius in crystallo proponatur.

37. E centro C quod sumo esse in intersectione A H & F E, fingatur ducta hemisphærois Q G q g M, qualem lumen debet formare, dum diffundit se intra crystallum; ac sectio illius, per planum A E H F, faciat ellipsim Q G $q g$,

QGqg, cujus magna diameter Qq, quæ est in linea AH, necessario erit una è magnis diametris sphæroidis: quoniam, axis spheroidis cum sit in plano per FEB, cui QC perpendicularis est, sequitur QC esse quoque perpendicularem axi sphæroidis, ac proinde QCq unam è magnis illius diametris. Sed parva diamater hujusce ellipsis Gg habebit ad Qq rationem antea N°. 27. definitam inter CG & magnam semidiametrum sphæroidis CP, nempe ut 98779 ad 105032. Tab. IV. Fig. 3.

Sit longitudo lineæ N via, quam lumen in aëre conficit, dum in crystallo, e centro C, sphæroidem format QGqgM; &, ductâ CO perpendiculari ad radium QR, quæque sit in plano per CR & AH, collocetur, in angulo ACO, recta OK æqualis N, perpendicularisque ad CO, quæ occurrat rectæ AH in K. Posito deinde quod CL sit perpendicularis ad superficiem crystalli AEHF, & quod CM sit refractio radii qui incidit perpendiculariter in eandem illam superficiem, ducatur planum aliquod per lineam CM & per KCH, formans in sphæroide semi ellipsim QMq, quæ dabitur, cum angulus MCL datus sit 6. grad. cum 40. min. Constat autem ex superioribus dictis N°. 27. planum, quod tangeret sphæroidem in puncto M, in quo pono rectam CM occurrere hujus superficiei, parallelum fore plano QGq. Si igitur per punctum K ducatur KS parallela Gg, quæ parallela quoque erit QX tangenti Ellipsin QGq in Q; ac fingatur planum aliquod, quod transeat per QKS, tangatque sphæroidem: punctum contactus necessario erit in Ellipsi QMq, quia planum illud per KS, ut & planum quod sphæroidem tangit in puncto M, parallelum est QX tangenti sphæroidis; hæc enim consequentia in fine hujusce tractatûs demonstrabitur. Punctum illud contactûs sit in I, sumtis proportionalibus KC, QC, & DC, ductâque DI parallelâ CM; ac jungatur CI. Dico istam CI futuram esse refractionem quæsitam radii RC. Quod evidens e-

rit si, spectando C O, quæ perpendicularis est radio R C, tanquam portionem aliquam undæ luminis, demonstremus continuationem partis illius C reperiri in crystallo in I, ubi O pervenit in K.

38. Quemadmodum autem, ubi demonstravimus in capite de reflexione, radios & incidentem & repercussum esse semper in eodem plano, perpendiculari ad superficiem repercutientem, consideravimus latitudinem undæ unius luminis; ita nunc perpendamus oportet latitudinem undæ C O in diametro G *g*. Sumptâ igitur latitudine C *c* ad partem anguli E, sumatur simul rectangulum C O *o c* velut portio aliqua undæ, & compleantur parallelograma C K *k c*, C I *i c*, K I *i k*, O K *k o*. Dum igitur linea O *o* pervenit ad superficiem crystalli in K *k*, puncta universa undæ C O *oc* pervenerunt ad rectangulum K *c* per lineas parallelas O K; atque è punctis incidentiæ illorum formatæ sunt hæmisphæroides particulares intra crystallum, similes & similiter positæ ac hemisphærois Q M *q*; quæ necessario tangunt omnes planum parallelogrammi K I *i k*, eodem instanti quo O *o* est in K *k*. Quod facile est intelligere, cum singulæ quæque ex his hemisphæroïdibus, quæ suum habent centrum in linea C K, tangant planum hoc in linea K I (hoc enim demonstratur ut demonstravimus refractionem radii obliqui in sectione præcipua per E *f*) ac singulæ quæque, quorum centra sunt in linea C *c*, contingant idem planum K *i* in linea I *i*; existentibus omnibus his similibus hemispheroidi Q M *q*. Quandoquidem igitur parallelogramum K *i* universas illas sphæroides tangit, idem erit præcisè continuatio undæ C O *o c* intra crystallum, ubi O *o* pervenit in K *k*, quoniam illic determinatur motus ibique quantitas abundantior est quam alibicunque: adeoque apparet partem C undæ C O *o c* habere continuationem suam in I, sive radium R C frangi in C I.

Ubi animadvertendum est, proportionem refractionis pro

pro sectione hac crystalli eamdem esse ac proportionem lineæ N ad semidiametrum C Q: per quam nullo negocio reperientur refractiones radiorum omnium incidentium, eâdem ratione quâ supra demonstravimus pro sectione per F E; demonstratioque erit eadem. Verum patet, quod proportio illa refractionis minor sit hîc quam in sectione per F E B; ibi enim erat ut N ad C G, scilicet ut 156962, ad 98779, fere ut 8 ad 5: hîc vero est ut N ad C Q magnam semidiametrum sphæroidis, id est, 156962 ad 105032 fere ut 3 ad 2, at paullo minor. Quod perfecte cum observationibus convenit.

39. Cæterum à diversitate illa refractionum singulare in crystallo phænomenon oritur. Scilicet, si in chartâ collocetur, cui sunt inscriptæ litteræ aut aliæ quævis res illamque observes utroque oculo sito in plano sectionis per E F, vides litteras sublimiores per hanc refractionem irregularem, quam si oculos habueris in plano sectionis per A H. Discrimen autem illud patet ex alterâ refractione vulgari crystalli istius, cujus proportio est ut 5 ad 3, & quæ litteras illas semper attollit æqualiter altiusque quam refractio irregularis facit. Etenim videntur litteræ & chartæ cui inscriptæ sunt, quasi in duobus tabulatis diversis; ubi vero oculi siti sunt in plano per A H duo illa tabulata sunt quater magis à se invicem remota, quam ubi oculos habes in plano per E F.

Ostendemus effectum illum ex illis refractionibus sequi: quod simul conducet ad docendum, quis sit locus apparens puncti alicujus immediate sub crystallo positi pro diverso oculorum situ.

40. Ac primum videamus, quantum refractio irregularis plani per A H attollere debeat fundum crystalli. Planum figuræ hujus repræsentet sectionem per Q q & C L, in qua est etiam radius R C; ac planum semiellipticum per Q q & C M inclinatum sit ad primum, ut antea, angu- TAB. V, Fig. 5.

 lo

ſo 6 grad. cum 40 min. in quo plano tum eſt C I refractio radii R C.

Quod ſi ſpectetur nunc punctum I, tanquam in fundo cryſtalli, videaturque per radios I C R, I *c r* æqualiter fractos in punctis C *c*, quæ æque diſtare debent à D; & radii illi occurrant duobus oculis in R *r*. Conſtat punctum I viſum iri elevatum in S quò concurrunt rectæ R C, *r* C; quod punctum S eſt in D P perpendiculari ad Q *q*. Si autem ad D P ducatur perpendicularis I P, quæ tota cadet in fundum cryſtalli, longitudo S P erit elevatio apparens puncti I ſupra fundum.

Deſcribatur ſupra Q *q* ſemicirculus qui ſecet radium C R in B, unde ducatur B V perpendicularis ad Q *q*; & proportio refractionis pro ſectione illâ ſit ſicut antea, proportio lineæ N ad ſemidiametrum C Q.

Ergo ut N ad C Q, ita eſt V C ad C D, quod apparet ex methodo pro reperiendis refractionibus; quam demonſtravimus N. 31. Verum ut V C ad C D, ita V B ad D S. Ergo ſicut N ad C Q, ſic V B ad D S. Sit M L perpendicularis ad C L, &, quoniam pono oculos R *r* diſtantes à cryſtallo pede aut circiter, adeoque angulum R S *r* minimum, conſideretur V B tamquam æqualis ſemidiametro C Q, & D P tamquam æqualis C L; ergo ut N ad C Q ita C Q ad D S. Sed N conſtat ex 156962 partibus, quarum C M continet 100000 & C Q 105032. Ergo D S conſtabit ex 70283. Verum C L eſt 99324, cum ſit ſinus complementi anguli M C L 6 graduum cum 40. minutis, poſitâ C M pro radio. Ergo D P, ſpectata tamquam æqualis C L, erit ad D S ut 99324 ad 70283. Et hunc in modum cognoscitur elevatio puncti fundi I per ſectionis iſtius refractionem.

Tab. V. Fig. 6. 41. Repræſentetur nunc alia ſectio per E F, in figura 4., & G M *g* ſit ſemiellipſis, conſiderata in Numeris 27. & 28., quæ ſit per ſectionem undæ ſphæroidis cujus C eſt centrum. Punctum I in ellipſi ſumptum fingatur rurſus in fundo cryſtalli, cernaturque per I C R, I *c r*

ra-

radios fractos qui incurrunt in oculos ambos; & C R ac *c r* æqualiter inclinentur superficiem versus crystalli G *g*. Hisce sic positis si ducatur I D parallela C M, quam sumo esse refractionem radii perpendicularis qui incideret in punctum C, distantiæ D C & D *c* æquales erunt, ut facile est videre ex demonstratis N°. 28. Constat vero punctum I videri debere in S quo occurrunt rectæ R C, *r c* productæ; & punctum illud S incidere in lineam D P perpendicularem ad G *g*: ad quam D P si ducatur perpendicularis I P, distantia P S repræsentabit elevationem apparentem puncti I. Supra G *g* describatur semicirculus qui secet C R in B, unde ducatur B V perpendicularis ad G *g*; & N ad G *c* repræsentet proportionem refractionis hac in sectione, ut in N°. 28. Quandoquidem igitur C I est refractio radii B C, & D I parallela C M; necesse est V C sit ad C D, ut N ad G C, ex demonstratis N°. 31; sed ut V C ad C D ita B V ad D S. Ducatur M L perpendicularis ad C L; & quoniam sumo iterum oculos elevatos satis supra crystallum, B V censetur æqualis semidiametro C G; ac proinde D S erit tunc tertia proportionalis lineis N & C G: sic & D P censebitur æqualis C L. Cum autem C G constet ex 98778 partibus ex quibus C M habet 100000, N constat ex 156962; ergo D S constabit ex 62163. Verum C L determinata etiam est, habetque 99324 partes, sicut dictum est N°. 34; ergo ratio P D ad D S erit ut 99324 ad 62163. Et sic detegitur elevatio puncti fundi I per refractionem hujusce sectionis, & patet elevationem illam majorem esse quam per refractionem superioris sectionis, cum ratio P D ad D S ibi esset ut 99324 ad 70283.

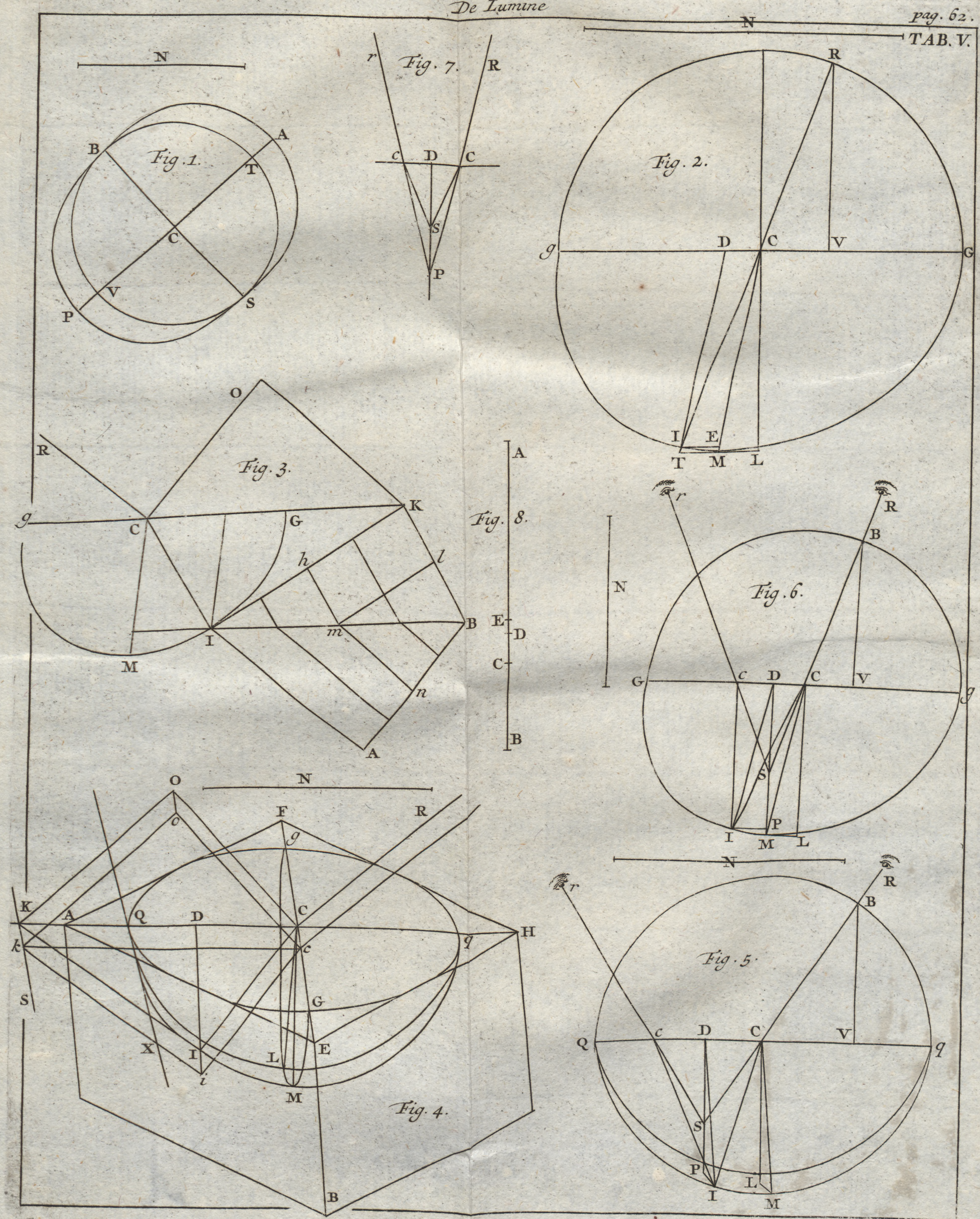
Verum per refractionem regularem crystalli, cujus supra diximus proportionem esse 5 ad 3, elevatio puncti I aut P in fundo erit $\frac{2}{5}$ altitudinis D P, sicut videre est in hac figura, ubi, cum punctum P videatur per radios P C R, P *c r* æqualiter fractos in superficie C *c*, necesse est punctum illud videatur in S, in perpendiculari P D Tab. V. Fig. 7.

quò concurrunt rectæ R C, *r c* productæ. Et notum est, lineam P C ad C S esse ut 5 ad 3, quandoquidem sunt inter se velut sinus anguli C S P aut D s C ad sinum anguli S P C. Ac quoniam oculis R, *r*, positis valde distantibus supra crystallum, ratio P D ad D S censetur eadem quæ P C ad C S, elevatio P S erit quoque $\frac{2}{5}$ P D.

Tab. V. Fig. 8. 42. Quod si sumatur linea recta A B pro spissitudine crystalli, cujus punctum B sit in fundo, dividaturque linea illa, juxta proportiones elevationum repertarum, in punctis C, D, E; adeo ut A E sit $\frac{3}{5}$ A B, A B ad A C ut 99324 ad 70283, & A B ad A D ut 99324 ad 62163: puncta illa divident A B, ut in hâc figura. Reperietur autem hoc plane cum experientia convenire, id est, si oculos habeas in plano quod secat crystallum, secundum parvam diametrum Rhombi superioris, refractio regularis extollet litteras in E, videbisque & fundum & litteras, quibus impositus est fundus, per refractionem irregularem exurgere in D. Contra vero, si oculos habueris in plano quod secat crystallum secundum majorem diametrum Rhombi superioris, refractio quidem vulgaris extollet litteras in E ut prius, refractio vero irregularis eodem tempore in C tantummodo; ita ut intervallum C E futurum sit quadruplum intervalli E D quod videbatur prius.

43. Inutile foret hic notare in utraque illa oculorum positione, imagines productas ab irregulari refractione non videri directe sub iis, quæ à refractione regulari procedunt; sed ab iis divertere, recedentes magis ab angulo solido æquilaterali crystalli. Hoc enim sequitur ex iis quæ hactenus de refractione irregulari demonstravimus, imprimisque constat ex ultimis demonstrationibus nostris; in quibus videmus, punctum I (*fig* 5. 6.) cerni per refractionem irregularem in S, in perpendiculari D P: in qua etiam apparere debet imago puncti P per refractionem regularem; non vero imago puncti I, quæ erit fere directè supra idem illud punctum, & altior quam S.

Quod


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.



Quod autem attinet ad elevationem apparentem puncti I in cæteris positionibus oculorum supra crystallum, præter duas illas quas ad examen modo revocavimus; imago puncti illius apparebit semper per refractionem regularem inter duas altitudines D & C, ab una ad alteram pergens, prout oculi circa crystallum immobilem movebuntur. Hoc totum autem cum hypothesi nostra mirifice convenit, ut unusquisque certus erit, ubi docuero quâ ratione reperiri possint refractiones irregulares cæterarum sectionum crystalli præter duas illas, quas consideravimus. Ponamus unam è faciebus crystalli in quâ sit ellipsis H D E, cujus centrum C sit etiam centrum sphæroidis H M E in qua extendit se lumen, cujusque dicta ellipsis est sectio. Et radius incidens sit R C cujus refractio reperienda proponatur. TAB. VI. Fig. 1.

Ducatur planum transiens per radium R C, & perpendiculare plano ellipseos H D E, & hoc secans juxta rectam B C K. Dein, in eodem plano per R C, ductâ C O perpendiculari ad C R, in angulo O C K collocetur O K perpendicularis ad O C, & æqualis lineæ N, quam pono esse viam luminis in aere, quo tempore se diffundit intra crystallum per sphæroidem H D E M. Tum in plano ellipseos H D E, ducatur per punctum K, K T perpendicularis ad B C K. Porro si concipiatur planum aliquod ductum per rectam K T, contingensque sphæroidem H M E in I, recta C I erit refractio radii R C, ut facile colligitur ex demonstratis No. 37.

At ostendendum est, quî definiri queat punctum contactûs I. Ducatur igitur ad lineam K T linea parallela H F quæ contingat ellipsim H D E, punctumque illud contactûs sit in H. Deinde ductâ rectâ per C H, quæ occurrat K T in T, fingatur per eamdem C H & per C M, quam sumo esse refractionem radii perpendicularis, planum, quod faciat in sphæroide sectionem ellipticam H M E. Certum est planum, quod transibit per rectam

K T

K T contingetque sphæroidem, contacturum illam esse in puncto quodam ellipseos H M E, ex lemmate demonstrando in fine hujusce capitis. Punctum autem illud necessario est punctum I quæsitum, quandoquidem planum ductum per T K non potest nisi in uno puncto sphæroidem contingere. Punctum vero I determinatur facile, cum ad id satis sit, si ducas è puncto T, quod est in plano ellipseos, tangentem T I, eo modo qui demonstratus est supra. Etenim data est ellipsis H M E, cujus C H & C M sunt semidiametri conjugatæ; quoniam recta ducta per M, parallela ad H E, contingit ellipsim H M E, ut sequitur ex eo, quod planum ductum per M, parallelumque plano H D E, contingit sphæroidem in puncto illo M, quod videre est N°. 27 & 23. Cæterum positio ellipseos istius, respectu plani per radium R C & per C K, data etiam est; unde nullo negocio reperietur positio refractionis C I, respectu radii R C.

Notandum autem est, eamdem ellipsim H M E inservire ad reperiendas refractiones cujuslibet alterius radii, qui erit in plano per R C & per C K; quia planum quodvis, parallelum rectæ H F aut T K, quod sphæroidem continget, illam eàdem in ellipsi continget, ex lemmate modo citato.

Investigavi hunc in modum singulatim phænomena quæque refractionis irregularis hujusce crystalli, ut certior fierem an ea omnia, quæ ex hypothesi nostra sequuntur, cum observationibus revera convenirent. Quod cum ita sit, non mediocre argumentum est veritatis principiorum nostrorum. Sed aliquid addam, quod eadem mirifice confirmat. Loquar scilicet de diversis sectionibus crystalli, cujus diversæ superficies quæ inde oriuntur producunt refractiones tales penitus, quales oportet esse ex hypothesi mea.

Tab. VI. Fig. 2. Ut, quæ sint sectiones illæ, quilibet intelligat, sit A B K F sectio præcipua per axem crystalli A C K, in qua erit quoque axis S S undæ sphæroideæ luminis diffusæ

ſæ intra cryſtallum è centro C; & linea recta, quæ ſecat S S, in medio & ad angulos rectos, ſcilicet P P erit una è magnis diametris.

Quemadmodum autem in ſectione naturali cryſtalli per planum parallelum duabus ſuperficiebus oppoſitis, quod hic repræſentatur per lineam G G, refractio ſuperficierum inde ortarum fit juxta hemiſphæroidas G N G, ex explicatis in theoria noſtra præcedenti; ita, ſectâ cryſtallo per N N, plano perpendiculari parallelogrammo A B K F, refractio ſuperficierum formabitur per hemiſphæroidas N G N: ſectâque per P P perpendiculariter eidem parallelogrammo, refractio ſuperficierum formabitur per hemiſphæroidas P S P, & ſic de cœteris. At vidi, ſi planum N N eſſet fere perpendiculare plano G G, faceretque angulum N C G, qui eſt à latere A; 90 graduum 40. min. hemiſphæroides N G N, fieri ſimiles hemiſphæroidibus G N G, quandoquidem plana N N & G G erant æqualiter inclinata angulo 45 graduum cum 20 minutis ad axem S S. Proinde neceſſe erat, ſi theoria noſtra vera eſſet, ut ſuperficies ſingulæ, ortæ â ſectione per N N, darent omnino eaſdem refractiones, ac ſuperficies ſectionis per G G. Neque modo ſuperficies ſectionis per N N, ſed etiam univerſæ aliæ, quæ orirentur â planis inclinatis ad axem S S angulo ſimili 45. grad. cum 20. min. Ita ut innumeræ ſectiones deberent eaſdem plane refractiones efficere, quas ſuperficies naturales cryſtalli, aut quas ſectio dat quæcunq; parallela uni ex his ſuperficiebus, quæ habetur, ubi lapis ille finditur.

Conſideravi etiam, quod cryſtallo ſectâ plano ducto per P P, refractio ſuperficierum debeat ejuſmodi eſſe, ut radius perpendicularis minime frangeretur, & tamen in radiis obliquis eſſet refractio irregularis diverſa à regulari, & quæ objecta cryſtallo ſuppoſita minus attolleret quam refractio regularis.

Obſervabam præterea, cryſtallo ſectâ aliquo plano per axem S S, quale eſt planum hujus figuræ, radium perpen-

dicularem refringi non debere; &, quantum ad radios obliquos, diversas esse mensuras refractionis irregularis, pro diverso situ plani in quo erat radius incidens.

Universa autem illa phænomena in crystallo ita deprehendebantur, adeoque non dubium mihi fuit, quin ubique similem haberem successum. Itaque conclusi effici posse ex hoc crystallo solida naturalibus similia, & quæ in omnibus superficiebus suis easdem producent refractiones tum irregulares tum regulares, ac superficies ipsæ naturales, quæ tamen alio prorsus modo findentur, nec parallelè ulli è faciebus.

Collegi quoque ex eo confici posse pyramides basi quadratâ, pentagonâ, hexagonâ aut totidem laterum quot velis, quarum superficies illas easdem refractiones haberent ac superficies naturales crystalli, exceptâ basi quæ radium perpendicularem non franget. Singula quæque superficies faciet cum axe crystalli angulum 45. grad. cum 20. basisque erit sectio perpendicularis axi.

Demum conclusi ex crystallo illâ confici posse prismata trium aut plurium laterum, quorum neque latera neque bases, radium perpendicularem frangent, quamvis omnes tamen faciant duplicem refractionem in radiis obliquis. Cubus continetur in his prismatibus quorum bases sunt sectiones perpendiculares axi crystalli, & latera sectiones parallelæ axi eidem.

Ex omnibus his quoque patet, causam irregularis crystalli refractionis non hærere in dispositione sectionum, unde constare videtur, & secundum quas secatur tribus diversis modis; adeoque ibidem frustra quæri.

Verum ut, qui crystallum ejuscemodi penes se habent, ipsimet experiri queant, quæ dixi, docebo quomodo illud secuerim expoliverimque. Facile secueris operâ rotarum illarum quibus gemmarii & lapicidæ utuntur; sed lævigare illud difficillimum est, imo vulgari ratione asperas potius superficies quam læves efficies.

Igitur

Igitur post tentamina plurima reperi demum nullâ ad hunc usum metalli laminâ opus esse, sed tantum speculo aspero & rudi. Ibi arenæ tenuis & aquæ ope lævigatur paulatim crystallum hoc vitrorum Telescopii instar expoliturque tandem eâdem operâ, & minus minusque materiæ semper adhibendum est. Non potui tamen efficere, ut crystallum nitidum penitus & pellucidum esset; sed æqualitas, quæ exinde superficiebus advenit, facit ut in eis observentur melius refractionis effectus, quam in superficiebus, quæ fiunt ubi lapis finditur, & quibus semper aliqua inest inæqualitas.

Quando superficies mediocriter est lævigata, si fricetur olei guttâ aut albumine ovi, pellucidissima evadit, ita ut refractio in ea optime videatur. Atque hoc auxilium imprimis necessarium est, si expolire libeat superficies naturales, easque æquare, quoniam difficilius nitidæ fiunt, quam aliæ sectiones, quæ eo commodius expoliuntur quo minus accedunt ad plana illa naturalia.

Sed antequam libellum huncce concludam, juvat disserere de phænomeno quodam prorsus admirabili quod reperi postquam superiora omnia descripsissem. Etsi enim illius causam huc usque non invenerim, nihilo secius indicabo, quo alii illam indagent. Videtur necesse fore ut aliæ suppositiones fierent præter eas quas feci, quæ tamen non minus verisimiles futuræ sunt, postquam tot experimentis fuerint confirmatæ.

Phænomenon autem illud est hujusce modi. Si duo frusta crystalli sumas alterumque alteri applices, aut inter utrumque spatium aliquod relinquas; si singula alterius latera singulis alterius lateribus parallela sint; tum radio aliquo luminis, ut A B, bifariam diviso intra prius frustum, nempe in B D & in B C, juxta utramque refractionem tum regularem tum irregularem, & inde ad alterum frustum perveniente; uterque radius hoc transibit neque amplius bifariam dividetur. Sed is qui factus est è refractio- Tab. VI. Fig 3.

 ne

ne regulari, ut hic D G, faciet tantummodo refractionem unam regularem in G H, & alter C E irregularem unam in E F. Idemque contingit non modo hac in dispositione, sed etiam in illis omnibus ubi sectio præcipua utriusque frusti in eodem plano est; neque opus est, ut duæ superficies quæ se mutuo spectant parallelæ sint. Admirabile autem prorsus est cur radii C E & D G, emissi ex aëre in crystallum inferius, non dividantur ut primus radius A B. Hoc videtur Radium D G, transeundo per crystallum superius, amisisse quod necessarium est ad movendam materiam quæ refractioni irregulari inservit; & C E pariter quod opus est, ut moveat materiam quæ refractioni regulari faciendæ utilis est. At aliud quid ratiocinium hoc evertit. Scilicet si utrumque crystallum ita disponas ut plana, quæ sectiones præcipuas faciunt sese ad angulos rectos secent; sive superficies quas spectant parallelæ sint aut non. Tunc radius qui venit è refractione regulari, ut D G, unam tan-
Tab. VI. Fig. 4. tum refractionem irregularem facit in inferiori frusto; & è contrario radius, qui venit è refractione irregulari, ut C E, unam tantum regularem.

Sed in cæteris positionibus innumeris, præter eas quas modo determinavi, radii D G & C E iterum dividuntur bifariam per refractionem crystalli inferioris; ita ut, ex unico radio A B quatuor conficiantur modo æque clari, modo alii aliis obscuriores, pro diversis utriusque crystalli positionibus: sed qui simul non magis videntur splendere quam radius unicus A B.

Si nunc consideretur, quod radiis C E & D G iisdem manentibus pendeat à positione quam habet crystallus inferior, ut vel bifariam dividantur, vel nullo prorsus modo, ubi is radius A B dividitur semper; concludendum videtur, undas luminis, ex eo quod priorem crystallum permearint, acquirere certam quamdam formam dispositionemve, per quam, ubi in crystallum incurrunt certo quo-

quodam modo positam, possint movere duas diversas materias quæ duabus diversis refractionibus inserviunt; nec movere, nisi unam si in crystallum aliter positam incurrerint. Quo autem pacto id fiat, nihil reperire potui, quod mihi satisfaceret.

Hæc itaque aliis relinquo meditanda, transeo ad illa, quæ dicenda habeo tum de figura insolitâ hujusce crystalli, tum de ratione cur facile findatur tribus modis & parallelè alicui è superficiebus suis.

Plurima sunt tum vegetantia, tum fossilia, tum genera salis congelati, quæ cum certis angulis figurisque regularibus formantur. Neque pauciores sunt flores qui constanter habeant disposita folia in figuram polygoni regularis, trium, quatuor, quinque aut sex laterum, neque unquam amplius. Quod non indignum observatu est, cum propter figuram polygonam, tum propter certum illum constantemque numerum, quem nunquam excedunt, 6.

Crystallus vulgaris crescere solet in speciem virgarum hexagonarum, adamantesque plurimi nascuntur cum apice quadrato superficiebusque lævibus. Quoddam genus est lapillorum planorum & in se invicem aggestorum, qui figurâ sunt omnes pentagona, angulosque habent rotundos, & latera paululum introrsum flexa; grana salis marini constanter accedunt ad figuram aut saltem ad angulum cubi. In cæterorum salium congelatione & in saccharo ipso reperias alios angulos solidos cum superficiebus omnino planis. Nix tenuis fere semper cadit in speciem stellularum cum sex radiis, aliquando vero hexagona est lateraque habet recta. Sæpius intra aquam, quæ congelare incipit, observavi, quasi quædam folia plana & tenuissima glaciei, è quorum medio diffunduntur plures rami inclinati angulo 60. grad. Omnia hæc digna sunt quæ accuratissime considerentur, ut noverimus quâ ratione quove artificio natura ibidem agat. Verum non proposui

traćtare hoc argumentum penitus. Videtur in genere regularitas rerum illarum, ab ordine particularum invisibilium & æqualium, è quibus constant, oriri. Nunc vero ut ad crystallum nostram Islandicam deveniam, dico, quod si qua esset pyramis ut A B C D, conflata tenuibus corpusculis rotundis non sphæricis, sed sphæroideis planis, qualia efficerentur per conversionem Ellipsis G H supra minorem diametrum E F, cujus proportio ad majorem fere est ut 1. ad 8, Angulus solidus acuminis D foret æqualis angulo obtuso & æquilaterali hujusce crystalli. Quinimmo dico, si corpuscula illa inter se essent leviter conglutinata, quod ubi rumperes pyramidem, rumperes illam secundum superficies parallelas iis quæ acumen ejus constituunt; ac proinde, ut facile est colligere, inde nascerentur prismata similia iis quæ ex priore crystallo orta sunt, quales exhibet hæc altera figura. Quod fit, quia, ubi hunc in modum rumpitur series una sphæroidum sese totam facile sejungit à serie vicina, cum unaquæque sphærois à tribus tantum sphæroidibus alterius ordinis se sejungat, è quibus una dumtaxat hanc contigit per superficiem suam planam, duæ vero aliæ solummodo per extremas margines. Quod autem superficies illæ ruptæ nitidæ sint & læves, hoc fit quia, si quæ sphærois ex serie vicina emergere vellet, & eam sequi quæ abscedit, oportet se à sex sphæroidibus separaret, quibus retinetur undequaque, & quarum quatuor eam per superficies illas planas premunt. Cum igitur anguli nostri crystalli, & ratio quâ finditur, cum eis penitus conveniant, quæ observari licet in contextu sphæroidum ejusmodi, non leve argumentum est particulas illius eodem modo factas esse & dispositas.

Tab. VI. Fig. 5.

Tab. VI. Fig. 6.

Et verisimile est prismata crystalli illius fieri per rupturam pyramidum, cum scripserit Bartholinus reperiri frusta figuræ pyramidalis triangularis. At si massa intus tantum contexta esset ex illis parvis sphæroidibus coacervatis, quæcunque

cunque etiam ejus exterior forma esset, constat ex modo dictis, quod fracta prismata similia produceret. Reliquum igitur est ut videamus, utrum aliæ rationes sint quæ nostram conjecturam confirment, & num non sint, quæ eidem repugnent.

Objici potest crystallum hanc ita coagmentatam duabus aliis adhuc modis findi posse, quorum unus est secundum plana parallela basi pyramidis, nempe triangulo A B C; alter parallele plano, cujus sectio designatur lineis G H, H K & K L. Verum ut utraque divisio possibilis sit, tamen difficilior est quam ea quæ parallela erat alicui ex tribus planis pyramidis; ac proinde si tentes crystallum frangere, findi semper debet potius secundum tria hæc plana quam secundum alia duo. Ubi habes certum numerum sphæroidum ejusmodi, in forma & instar pyramidum disponas, apparet quare duæ divisiones sint difficiliores. Etenim in ea divisione quæ fieret parallela basi, unaquæque sphærois debet se sejungere à tribus aliis quas contingit per superficies planas; quæ arctius premunt quam contactus extremorum marginum. Præterquam quod divisio illa non fiet per series integras, quia sphærois quæque seriei unius parum retinetur ab aliis sex sphæroidibus ejusdem seriei, cum ab illis per extremos dumtaxat margines contingatur. Adeo ut adhæreat facile seriei vicinæ aliæque ipsi eadem de causa, unde superficies inæquales oriuntur. Docet quoque Experentia si crystallum lapide aspero conteras idque in angulo solido æquilaterali, facile reverâ eâ parte illam minuas, sed superficiem hoc modo applanatam lævigare quam difficillimum est. Tab. VI. Fig. 6.

Quod ad divisionem alteram juxta planum G H K L pertinet, patebit, quod unaquæque sphærois necessario à quatuor vicini ordinis sphæroidibus abscedere deberet, è quibus duæ illam per superficies planas contingunt & duæ per margines. Itaque divisio illa laboriosior etiam est quam ea quæ parallela est uni è superficiebus crystalli, ubi

ubi singula sphærois à tribus tantum seriei vicinæ premitur, ab una nempe per superficies planas & á duabus tantum per margines.

Quod tamen mihi indicavit in crystallo esse hujuscemodi stratus, hoc est, apud me habeo fragmentum ½ libræ quod fissum est per longitudinem, ut prisma prædictum, per planum G H K L, quod patet ex coloribus Iridis per totum planum diffusis, etsi duo fragmenta adhuc cohæreant. Hæc omnia igitur argumento sunt, crystallum ita esse compositam ut dixi; sed experimentum addere libet. Si cultello unam è superficiebus illis naturalibus radas, descendasque ab angulo obtuso æquilaterali, id est, à vertice pyramidis; crystallus videtur esse durissima, quam tamen facile seces, si in contrariam partem cultellum convertas. Atque hoc manifesto sequitur ex situ tenuium illarum sphæroidum, supra quas priori ratione, cultellus labitur, cum, alterâ, ea se subtus dividat, fere ut squammas piscium.

Non mihi suscipiam discutere, quâ ratione tot tamque exigua generentur corpuscula, æqualia sibi invicem & similia, neque quo pacto eximium hunc in ordinem componantur. Utrum formentur primum ac deinde ordinentur, an vero nascantur simul ordinenturque, quod ad verum magis accedere mihi videtur. Verum mysteria illa naturæ obscuriora sunt, quam ut ea, quâ instructi sumus ejus cognitione, explicare possimus. Hoc unum dicam exiguas illas sphæroides fortasse aliquid conferre ad formandas sphæroides undarum luminis, quas supra exposui, cum utræque eodem modo sitæ sint habeantque axes parallelos.

Computationes in hoc Capite memoratæ.

BArtholinus in sua de hàcce crystallo disputatione, sumit obtusos facierum angulos 101. graduum, quos esse dixi 101. graduum cum 52. minutis. Addit se dimen-

mensum esse angulos hos immediate super crystallum ipsam, quod difficile est accuratissime facere, quia latera, ut CA & CB hacce in figura, solent trita esse, adeoque minime recta. Ut igitur hac de re certior essem, metiri actu volui angulum obtusum quo inclinatæ sunt ad se invicem facies CBDA & CBVF, scilicet angulum OCN, ductâ CN perpendiculari ad FV, & CO perpendiculari ad DA. Angulumque OCN comperi esse 105 graduum, illiusque complementum ad duos angulos rectos, CNB, 75 graduum, ut requirebatur. Tab. VI. Fig. 7.

Ut deinde angulum obtusum BCA reperirem, finxi sphæram, cujus centrum esset in C, & in superficie ejus triangulum sphæricum, formatum per intersectionem trium planorum, quæ angulum solidum C, efficiunt. In triangulo illo æquilaterali, qui sit ABF in altera hacce figura, videbam singulum quemque angulum debere esse 105 graduum, scilicet æqualem angulo OCN; & singulum quodque latus totidem habere gradus quot angulus ACB, ACF, aut BCF. Ducto igitur arcu FQ perpendiculari ad latus AB quod dividit æqualiter in Q, triangulum FQA habebat angulum Q rectum, angulum A 105 graduum, & F dimidium tantum nempe 52 graduum cum 30 minutis; exindeque reperiebam hypotenusam AF 101 graduum cum 52 min. & arcus ille AF mensura est anguli ACF in figura crystalli. Tab. VI. Fig. 8.

Eadem in figura, si planum CGHF ita secet crystallum, ut simul dividat angulos obtusos ACB, MFV in duas partes æquales, dictum est N°. 10. angulum CFH esse 70 graduum cum 57 minutis. Quod facile etiam demonstratur in eodem triangulo sphærico ABF, ubi apparet arcum FQ esse totidem graduum quot angulus GCF in crystallo, cujus complementum ad duos rectos est angulus CFH. Atqui arcus FQ invenitur 109 gradus cum 3 min. Ergo complementum illius, 70 graduum cum 57 minutis, est angulus CFH. Tab. VI. Fig. 7.

Dictum est N°. 26. quod, cum recta CS, quæ in figura 7. est CH, sit axis crystalli, id est æqualiter inclinata sit versus tria latera CA, CB & CF, angulus GCH sit 45 grad. & 20 min. Hoc autem adhuc nullo negotio per idem triangulum sphæricum supputatur. Enim vero ducto altero arcu AD qui secat BF æqualiter, & FO in S, punctum illud erit trianguli illius centrum; & facile est videre arcum SQ mensuram esse anguli GCH, in figura quæ crystallum repræsentat. In Triangulo autem QAS Rectangulo cognitus est angulus A, qui habet 52 gradus cum 30 min., & latus AQ, quod est 50 graduum cum 56 min.; unde reperitur latus SQ 45 graduum & 20 min.

Tab. VI. Fig. 9. Ad Num. 27. ostendendum est, cum PMS sit Ellipsis, cujus centrum est C, & quæ contingit rectam MD in M, adeo ut angulus MCL, quem facit CM cum CL, perpendiculari ad DM, sit 6 graduum cum 40 min.; cumque minor semidiameter CS faciat, cum CG parallelâ ad MD, angulum GCS 45 grad. cum 20 min.; ostendendum est, inquam, cum CM constet ex 100000 partibus, PC majorem semidiametrum ellipsis illius, esse 105032 partium, & CS minorem semidiametrum 93410 tantum.

CP & CS producantur occurrantque tangenti DM in D & Z, & è puncto contactûs ducantur MN & MO, perpendiculares ad CP & CS. Nunc cum anguli SCP, GCL, sint recti, angulus PCL æqualis erit GCS qui erat 45 graduum cum 20 min. si vero demas angulum LCM qui est 6 graduum cum 40 min. de LCP qui est 45 grad. cum 20 min. superest MCP 38 graduum cum 40 min. Si igitur consideremus CM tanquam radium constantem è 100000 partibus, MN, sinus 38 grad. & 40 min. erit 62479. Et in triangulo rectangulo MND, MN erit ad ND, ut radius tabularum ad tangentem 45 graduum cum 20 min. quia angulus NMD æqualis est DCL aut GCS; id est, ut 100000 ad 101170, unde deducitur ND 63210. Verum NC est 78079 ex iisdem partibus

Tab. V. Fig. 6.

tibus quarum CM est 100000, quia nimirum NC est sinus complementi anguli MCP, qui erat 38 grad. cum 40 min. Ergo tota DC est 141289; & CP quæ est media proportionalis inter DC & CN, quia MD ellipsin tangit, erit 105032.

Eumdem in modum, quia angulus OMZ æqualis est CDZ aut LCZ, qui est 44 grad. & 40 min. cum sit complementum GCS, sequitur quod, ut radius tabularum ad tangentem 44°. 40′, ita erit OM 78079, ad OZ 77176. At OC est 62479 ex iisdem illis partibus quarum CM est 100000, quia æqualis est MN sinui anguli MCP 38°. 40′. Ergo tota CZ est 139655; & CS, quæ est media proportionalis inter CZ & CG, erit 93410. Tab. VI. Fig. 1.

Eodem loco dictum est CG inveniri 98779 partium; quod ut demonstretur, ducatur in eadem figura PE parallela DM & quæ occurrat CM in E, in triangulo rectangulo CLD, latus CL est 99324 (cum CM sit 100000) quia CL est sinus complementi anguli LCM 6°. 40′. Quandoquidem autem angulus LCD est 45°. 20′, ut æqualis sit GCS, reperietur latus LD 100486: unde si demas ML 11609, supererit MD 88877. Sed ut CD, quod erat 141289, ad DM 88877, ita CP 105032 ad PE 66070. Verum ut rectangulum MEH, sive differentia quadratorum CM, CE ad quadratum MC, ita est quadratum PE ad quadratum C*g*; ergo etiam ut differentia quadratorum DC, CP ad quadratum CD, ita quoque quadratum PE ad quadratum *g*C. At DP, CP & PE nota sunt, ergo & ipsum GC quod est 98779.

Lemma superius sine demonstratione assumtum.

Si sphæroidem aliquam contingant tum linea recta, tum duo aut plura plana, quæ parallela sint huic lineæ, licet non inter se; puncta universa contactûs & lineæ & planorum erunt in una eademque ellipsi, facta à plano quod transit per sphæroidis centrum.

Esto sphærois LED contacta à linea BM in puncto B, Tab. VI. Fig. 10.

& à planis parallelis huic lineæ in punctis O & A, demonstrandum est puncta B, O, & A esse in eadem ellipsi quæ facta sit in sphæroide a plano quod per illius centrum transeat.

Per lineam BM & puncta O, A ducantur plana parallela inter se, quæ, secando sphæroidem, faciant ellipses LBD, POP, QAQ, quæ similes omnes erunt ac similiter positæ, suaque centra habebunt K, N, R, in eâdem diametro sphæroidis, quæ erit quoque diameter ellipseos natæ è sectione plani transeuntis per centrum sphæroidis, secantisque plana trium illarum ellipsium ad angulos rectos; Quæ omnia manifesta sunt ex Prop. 15. libri quem de Conoidibus & Sphæroidibus Archimedes scripsit. Præterea duo ultima plana, quæ ducta fuere per puncta O, A, facient quoque, secando nempe plana quæ contingebant sphæroidem in eisdem punctis, lineas rectas ut OH, AS, quæ, ut facile patet, parallelæ erunt ad BM; & omnes tres BM, OH, AS, contingent ellipses LBD, POP, QAQ, in punctis illis BOA: cum simul sint tum in plano sphæroidum illarum, tum in planis quæ sphæroidem contingunt. Quod si nunc è punctis B, O, A, ducantur rectæ BK, ON, AR per earumdem ellipsium centra, per quæ etiam ducantur diametri LD, PP, QQ, parallelæ tangentibus BM, OH, AS; Diametri hæ erunt conjugatæ cum dictis BK, ON, AR. Quoniam autem tres Ellipses similes sunt & similiter positæ, habentque suas diametros LD, PP, QQ parallelas, constat earum diametros conjugatas, BK, ON, AR parallelas quoque fore. Et cum centra K, N, R sint, ut dictum est, in eadem sphæroidis diametro, parallelæ illæ BK, ON, AR necessariò erunt in uno eodemque plano, quod per diametrum illam sphæroidis transit; atque adeo puncta B, O, A, in eadem etiam erunt ellipsi, quam facit plani illius intersectio. Quod demonstrandum erat. Manifestum est autem demonstrationem fore eamdem, si, præter puncta O A, alia essent

essent in quibus sphæroidem contingerent plana parallela rectæ BM.

CAPUT VI.

De Figuris Corporum diaphanorum quæ ad Refractionem Reflexionemque conducunt.

POstquam explicui, quo pacto proprietates refractionis reflexionisque sequantur ex iis, quæ posuimus circa naturam luminis & corporum sive opacorum sive diaphanorum; ostendam nunc quam facile & naturaliter ex eisdem principiis deduci possint veræ figuræ quæ inserviunt, aut per refractionem aut per reflexionem, colligendis aut dispergendis radiis luminis, prout velis. Enim vero licet non videam, methodum dari, quâ his figuris utamur in refractione, tum quia difficile est formare perfecte secundum illas vitra Telescopiorum, tum quia in refractione ipsa proprietas est quædam, quæ obstet perfecto radiorum concursui, quod optime experimentis probavit Newtonus; Nihilo secius illarum inventionem referam, quandoquidem ipsa, ut ita dicam, sponte suâ nobis se offert, nostramque de refractione theoriam confirmat, per convenientiam quæ hic reperitur inter radium fractum, radiumque repercussum. Præterquam quod forte inde poterint deduci utilitates, quas jam nondum perspicimus.

Ut igitur ad figuras illas veniamus, primum ponamus reperiendam esse superficiem CDE quæ colligat in puncto B radios emissos ex A, punctumque D, datum in recta AB, superficiei illius esse verticem. Dico, sive per reflexionem aut per refractionem, necesse esse dumtaxat ut superficies illa ejusmodi sit, ut via luminis à puncto A ad omnia puncta lineæ curvæ CDE, & ab istis ad punctum concursûs, qualis est hîc via per rectas AC, CB, per AL, LB, & per AB, DB; ut via illa, inquam, conficiatur TAB.VII. Fig. 1. 2.

ficiatur

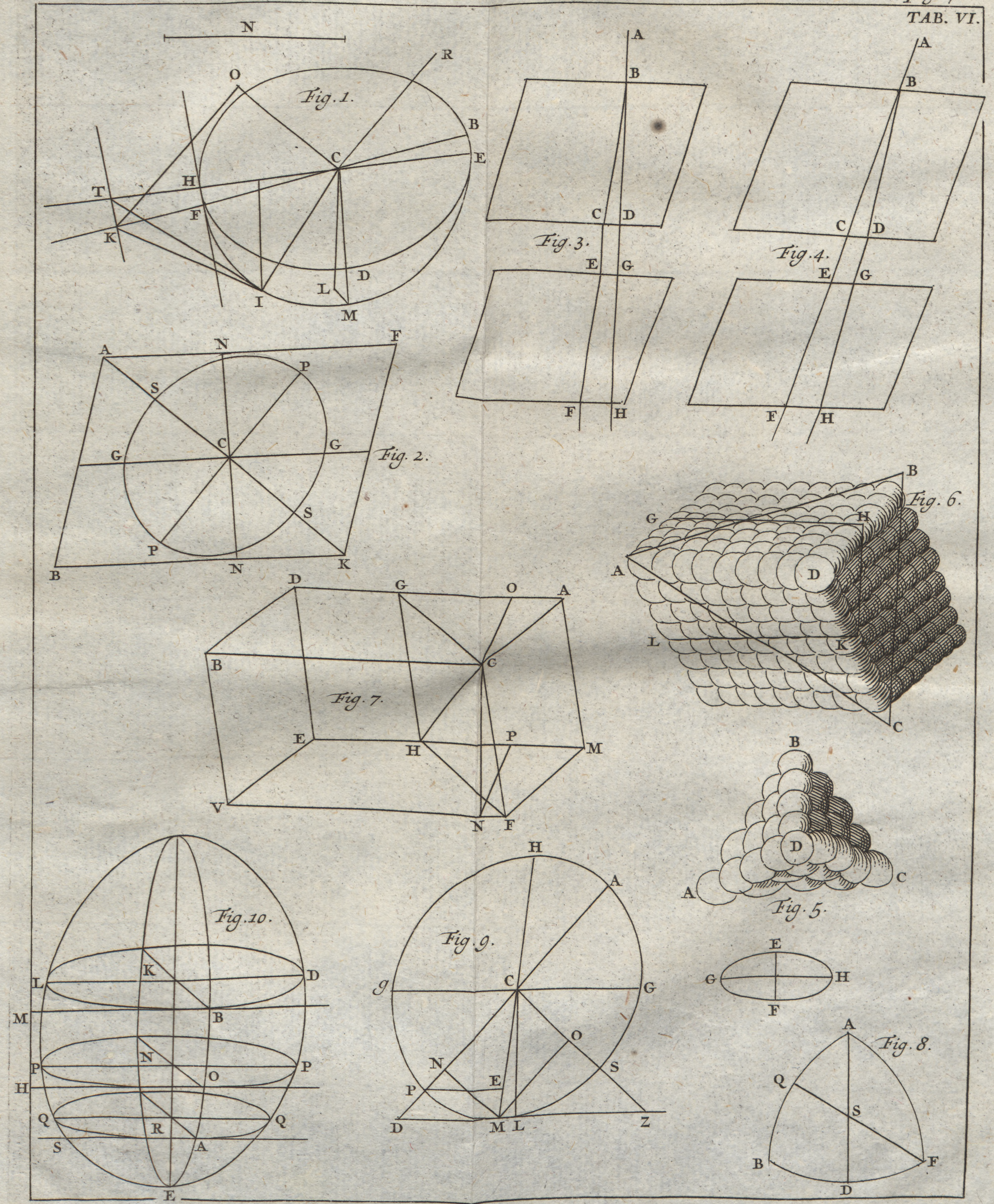
ficiatur ubique temporibus æqualibus : unde curvarum illarum inventio evadit facillima.

Quod enim attinet ad superficiem reflectentem, cum summa linearum A C & C B æqualis esse debeat summæ linearum A D & D B, apparet D C E debere esse Ellipsim. Quod vero ad refractionem spectat, si ponamus proportionem velocitatum undarum luminis intra diaphana A & B esse, verbi gratiâ, 3 ad 2 (qualem esse demonstravimus proportionem sinuum in refractione) tantum debet poni D H æqualis $\frac{3}{2}$ D B; & deinde, descripto, centro A, arcu F C, qui secet D B in F, alter arcus describi centro B cum semidiametro B K æquali $\frac{2}{3}$ F H. Intersectio C amborum arcuum erit unum è punctis quæsitis per quod curva debet transire. Puncto enim illo ita reperto, facile est primo ostendere tempus per A C & C B æquale futurum tempori per A D & D B.

Si enim ponamus lineam A D repræsentare tempus intra quod eamdem lineam lumen trajicit in aere, patet D H, æqualem $\frac{3}{2}$ D B, repræsentare tempus luminis per D B intra diaphanum, quia ibi eo longiori temporis intervallo opus habet, quo motu tardiori fertur. Idcirco tota A H repræsentabit tempus per A D & D B. Similiter linea A C aut A F erit tempus per A C; & cum F H sit ex constructione æqualis $\frac{3}{2}$ C B, repræsentabit tempus per C B intra diaphanum; ac proinde tota A H erit etiam tempus per A C & C B. Unde liquet tempus per A C & C B æquale esse tempori per A D & D B; eundemque in modum ostendetur, si L & K sunt alia puncta in curva C D E, tempora per A L, L B, & per A K, K B repræsentari semper per lineam A H; adeoque æqualia esse tempori per A D & D B.

Ut demonstremus deinde superficies, quas curvæ illæ per circumvolutiones suas conficiunt, directuras ita esse radios, quos accipiunt à puncto A, ut tendant versùs B; sumatur punctum K in curva longinquius à D quam C, verum

TAB. VI.





verum ita ut recta AK incidat extrinsecus in curvam quæ refractioni inservit. Describantur postea centro B arcus KS secans BD in S rectamque CB in R, & centro A arcus DN occurrens AK in N.

Quandoquidem summæ temporum per AK, KB, & per AC, CB æquales sunt; si de priore summa deducatur tempus per KB, & de altera tempus per RB, restabit tempus per AK æquale tempori per AC, CR. Quamobrem quo temporis spatio lumen venit per AK, erit quoque progressum per AC; & emissa erit unda particularis intra diaphanum è centro C, cujus semidiameter erit æqualis CR: unda vero illa necessario continget peripheriam KS in R, cum CB peripheriam illam ad angulos rectos secet. Sumpto pariter quolibet alio puncto P, in curva, ostendemus intra idem tempus transitus luminis per AK, venisse quoque per AL, & emissam fuisse undam particularem è centro L, quæ peripheriam eandem KS continget. Et sic de cœteris punctis curvæ CDE. Ergo quo temporis puncto lumen pervenerit in K, arcus KRS terminabit motum diffusum ex A in DCK; atque adeo idem ille arcus erit, in diaphano, propagatio undæ ortæ è puncto A, quæ potest repræsentari per arcum DN aut per quemvis alium qui propior sit centro A. Verùm partes omnes arcûs KRS extenduntur secundum rectas quæ illi sunt perpendiculares, sive quæ tendunt ad centrum B (hoc enim eodem modo demonstratur quo jam probavimus partes undarum sphæricarum extendi secundum rectas quæ ex illarum centro veniunt) progressusque illi undarum sunt radii ipsi luminis. Ergo radii illi omnes hìc ad punctum B tendunt.

Facile etiam esset reperire in eâ curvâ quæ refractioni inservit punctum C, aliaque omnia, dividendo nempe DA in G, ita ut DG sit $\frac{2}{3}$ DA, & describendo centro B arcum CX qui secet BD in X, alterumque centro A cum semidiametro AF æquali $\frac{3}{2}$ GX. Idem effici etiam posset, si descrip-

descripto, ut supra, arcu CX, efficeretur DF æqualis $\frac{2}{3}$ DX, & è centro A describeretur arcus FC; utraque enim illa constructio, ut facilè patet, eadem est ac prima quam vidimus. Manifestum etiam est ex postrema curvam illam esse eamdem quam Cartesius in Geometria sua dedit, primamque ex ovalibus suis nuncupat.

Pars una tantum ovalis illius refractioni servit, nempe, si AK est tangens, pars DK cujus K est terminus. Alteram vero partem Cartesius observavit refractionibus quoque utilem fore, si speculum conflari posset ex materia ita facta, ut vim radiorum (sive, ut nostro more loquar, velocitatem luminis, quod ille dicere non potuit, quia lumen instantaneum esse vult) augeret in proportione 3 ad 2. At ostendimus jam id in nostra ratione explicandæ reflexionis oriri non posse ex materia speculi, imo impossibile prorsus esse.

Ex iis quæ de illà ovali demonstrata fuere, facile erit reperire figuram, quæ inservit colligendis in unum punctum radiis incidentibus parallelis. Sumptà enim eàdem constructione, positoque puncto A infinite distanti, quod dat radios parallelos, Ovalis nostra fit vera ellipsis, cujus constructio in hoc tantum differt à constructione ovalis, quod FC hìc est linea recta perpendicularis ad DB, quæ prius erat arcus circuli. Enimvero cum unda luminis DN repræsentetur pariter per lineam rectam, probabitur puncta omnia illius undæ, quæ extendunt se ad superficiem KD per lineas parallelas lineæ DB, progressura deinceps punctum B versus quò simul advenient. Ellipsim vero, quæ reflexioni inserviebat, manifestum est hic fieri parabolam, quoniam consideratur focus illius A tanquam infinito spatio distans à B, qui hìc focus est parabolæ ad quem tendunt reflexiones omnes radiorum parallelorum lineæ AB. Horum autem effectuum demonstratio penitus eadem est, ac præcedens.

TAB. VII. Fig. 3.

TAB. VII. Fig. 4.

Quod

Curvam vero C D E, quæ refractioni inservit, esse ellipsim, cujus major diameter est ad distantiam inter focos, ut 3 â 2, quæ proportio est refractionis, facilè ex Algebraïcâ computatione detegitur. Nam si D B, quæ est data, nuncupetur a, perpendicularis illius D T indeterminata x, & T C, y; F B erit $a-y$; C B $\sqrt{xx+aa-2ay+yy}$. Sed natura curvæ est ejusmodi ut $\frac{2}{3}$ T C, cum C B sit æqualis D B, velut ultima in constructione dictum est; ergo æquatio erit inter $\frac{2}{3}y+\sqrt{xx+aa-2ay+yy}$ & a, quâ reductâ, venit $\frac{6}{5}ay-yy$ æqualis $\frac{9}{5}$, xx: id est, factâ D O æquali $\frac{6}{5}$ D B, rectangulum D F O æquale est $\frac{9}{5}$ quadrati F C. Unde patet D C ellipsim esse, cujus axis D O est ad parametrum, ut 9 ad 5; adeoque quadratum D O ad quadratum distantiæ focorum, ut 9 ad 9-5, id est 4: & tandem lineam D O ad distantiam illam, ut 3 ad 2.

Rursum si ponamus punctum B infinite distans, pro prima ovali nostra, comperiemus C D E esse veram hyperbolen, quæ faciet, ut radii emissi è puncto A paralleli fiant; ac proinde ii qui paralleli sunt intra corpus diaphanum, extrinsecus congregentur in punctum A. Notandum autem est lineas C X & K S fieri rectas perpendiculares ad B A, quia nimirum repræsentant arcus circulorum, quorum centrum B infinite distat. Et intersectionem perpendicularis C X & arcûs F C daturam esse punctum C, unum ex illis, per quæ curva transire debet. Quod faciet ut partes omnes undæ luminis D N, ubi occurrent superficiei K D E, progressuræ sint per parallelas ad K S, & perventuræ ad rectam illam eodem tempore; cujus rei demonstratio eadem est quâ in priore ovali usi sumus. Cæterum, ex computatione non laboriosa magis quam superior est, reperitur C D E hîc esse hyperbole, cujus axis D O est $\frac{4}{5}$ A D, & parameter æqualis A D. Unde facile demonstratur D O esse ad distantiam inter focos ut 3 à 2.

TAB VII. Fig 5.

Hic est uterque casus in quo sectiones conicæ refra-

ctioni inserviunt, & iidem quos in sua dioptrica explicat Cartesius, qui primus linearum illarum reperit usum, quatenus ad refractionem attinent, ut & ovalium quarum primam jam proposuimus. Altera autem ea est quæ inservit radiis versus punctum aliquod datum pergentibus, & in qua, si vertex excipiens radios est D, accidet, prout ratio A D ad D B data est major aut minor, ut alter vertex transiturus sit inter B A aut ultra A; quorum ultimum si contingat, erit eadem quam Cartesius tertiam nuncupat.

TAB. VII. Fig. 6. 7.

Inventio autem constructioque ac demonstratio secundæ istius ovalis eadem est quæ primæ. At notatu dignum est eam uno in casu circulum perfectum evadere, ubi scilicet ratio A D ad D B ea est, quæ metitur refractiones, ut hìc 3 ad 2, quam rem jam diu observaveram. De quartâ autem, cum reflexionibus dumtaxat impossibilibus utilis sit, non opus est ut agam.

TAB. VIII. Fig. 1.

Quod vero attinet ad methodum quâ lineas illas repperit Cartesius, cum ea neque ab illo neque ab alio, quod sciam, post illum explicata sit, dicam obiter qualis mihi fuisse videatur. Reperienda proponatur superficies, quam fecit circumvolutio curvæ K D E, quæ, excipiens radios incidentes emissos è puncto A, eosdem versus punctum B divertit. Considerantes igitur curvam illam ut jam notam, ponentesque verticem esse D in recta A B, dividamus eam in particulas quasi infinitas per puncta G, C, F. Deinde ductis, è singulo quoque puncto, lineis rectis versus A, quæ representent radios incidentes, aliisque item rectis versùs B; describantur è centro A arcus circulorum G L, C M, F N, D O, qui secent in L, M, N, O, radios emissos ex A. Demum è punctis K, G, C, F, describantur arcus K Q, G R, C S, F T qui secent radios, ductos versus B, in Q, R, S, T; & ponamus rectam H K Z secare curvam in K ad angulos rectos.

Cum

Cum igitur A K est radius incidens, refractioque illius intra diaphanum K B, necesse erat, juxta legem refractionum quæ nota erat Cartesio; ut sinus anguli Z K A esset ad sinum anguli H K B, ut 3 ad 2, posito hanc esse proportionem refractionis vitri; aut, ut sinus anguli K G L eamdem illam rationem haberet ad sinum anguli G K Q, spectatis K G, G L, K Q tanquam lineis rectis, propter illarum exiguitatem. Verum sinus illi sunt lineæ K L & G Q, si accipias G K pro radio circuli. Ergo L K ad G Q debebat esse ut 3 ad 2, adeoque ob eandem rationem M G ad C R, N C ad F S, O F ad D T. Ergo etiam summa antecedentium omnium ad omnes consequentes erat velut 3 ad 2. Producto autem arcu D O, donec offendat A K in X, K X est summa antecedentium. Producto item arcu K Q, donec & offendat A D in Y, summa consequentium est D Y. Ergo K X ad D Y debebat esse ut 3 ad 2. Unde apparebat curvam K D E esse ejus naturæ ut, ductis è quolibet puncto, verbi gratia e K, rectis K A, K B, excessus, quo A K superat A D, sit ad excessum quo D B superat K B, ut 3 ad 2. Enimvero demonstrari pariter potest, sumpto in curva quolibet alio puncto ut G, excessum quo A G superat A D, scilicet V G, esse ad excessum quo B D superat D G, scilicet D P, in eadem ratione ut 3 ad 2. Et hanc juxta proprietatem Cartesius in Geometria sua, curvas illas construxit, easdemque facile comperit, in casu radiorum parallelorum, hyperbolas fieri & ellipses.

Tab. VI. Fig. 6.

Verum revertamur nunc ad methodum nostram, videamusque quo modo facile conducat ad reperiendas lineas quas requirit latus unum vitri, ubi alterum est figuræ alicujus datæ, non modo planæ aut sphæricæ aut factæ per aliquam è sectionibus conicis (quæ restrictio est quâcum Cartesius problema hoc proposuit, solvendum relinquens posteris) sed generaliter cujuslibet: id est quæ facta fuerit per circumvolutionem alicujus lineæ curvæ datæ, ad

quam solummodo possimus ducere lineas rectas tangentes.

TAB. VIII. Fig. 2. Sit figura data facta per conversionem alicujus curvæ A K circum axem A V, & latus illud vitri excipiat radios emissos è puncto L. Ac demum spissitudo A B medii vitri sit data, ut & punctum F in quod radios omnino omnes cogere vis; qualiscumque fuerit prima refractio facta in superficie A K.

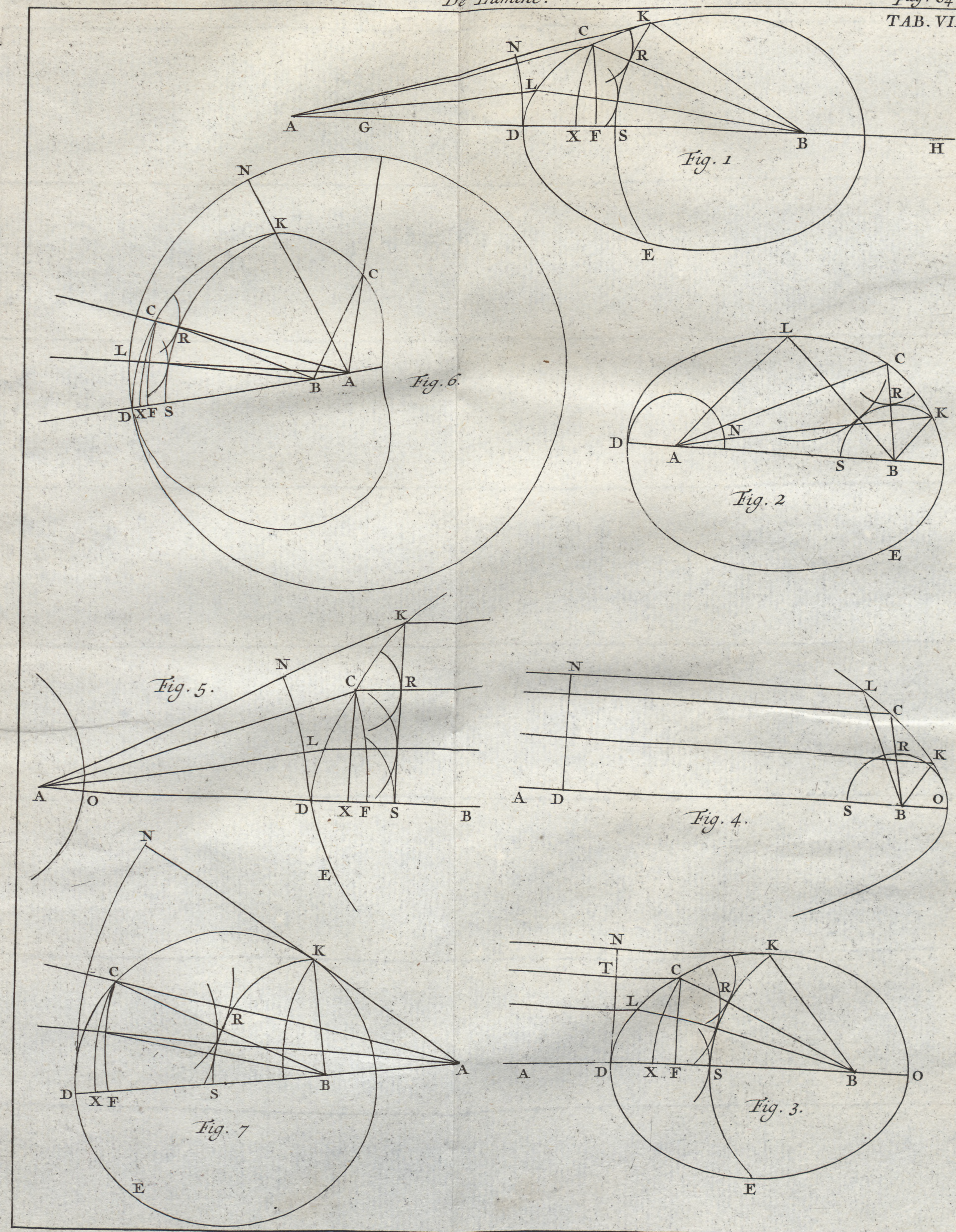
Dico, satis ad id esse si linea B D K, quæ facit alteram superficiem, ejusmodi sit ut via luminis à puncto L usque ad superficiem B D K, & deinceps ad punctum F, conficiatur ubique æqualibus temporis spaciis, quæ singula æqualia sint tempori intra quod lumen trajicit rectam L F, cujus pars A B est in vitro.

Sit L G radius incidens in arcum A K. Refractio illius G V data erit ope tangentis, quæ ducetur ad punctum G. Nunc reperiendum est in G V punctum D, ita ut F D cum $\frac{3}{2}$ D G, & recta G L, sint æquales tum F B cum $\frac{3}{2}$ B A, tum recta A L; quæ, ut apparet, constituunt longitudinem datam. Sive, sublatâ utrimque longitudine L G, quæ etiam data est, ducenda dumtaxat est F D supra rectam V G, adeo ut F D cum $\frac{3}{2}$ D G sit æqualis lineæ datæ: quod problema planum facillimum est; & punctum D unum erit ex iis per quæ curva B D K transire debet. Similiter, ducto alio radio L M, repertâque illius refractione M O, reperietur illâ in lineâ punctum N, adeoque quot volueris.

Ad demonstrandum curvæ effectum, describantur centro L arcus circuli A H secans L G in H, & è centro F arcus B P; ac in A B sumantur A S æqualis $\frac{2}{3}$ H G, & S E æqualis G D. Consideratâ igitur A H tanquam undâ luminis emissâ è puncto L, constat, dum pars illius H pervenerit in G, partem A nondum progressam fore intra corpus diaphanum, nisi per A S; sumo enim, ut supra, proportionem refractionis ut 3 ad 2, Novimus

autem

TAB. VII.



autem partem undæ quæ incidit in G, inde progredi per lineam G D, quoniam G V eſt refractio radii L G. Ergo quo temporis ſpatio pars illa undæ venit à G in D, altera quæ erat in S pervenit in E, cùm G D & S E æquales ſint. Sed dum iſtæc procedet ab E in B, pars undæ, quæ erat in D, diffundet in aere ſuam undam particularem cujus ſemidiameter D C (poſito undam illam ſecare in C rectam D F) erit $\frac{3}{2}$ E B, cum velocitas luminis extra diaphanum ſit ad eamdem intra diaphanum ut 3 ad 2. Facile autem demonſtratur, quod unda illa tanget in puncto C arcum B P. Cùm enim per conſtructionem F D $+$ $\frac{3}{2}$ D G $+$ G L, æquales ſint F B $+$ $\frac{3}{2}$ B A $+$ A L; ſublatis æqualibus L H, L A, reſtabunt F D $+$ $\frac{3}{2}$ D G $+$ G H, æquales F B $+$ $\frac{3}{2}$ B A. Rurſumque, ſi è latere uno demas G H & ex altero $\frac{3}{2}$ A S quæ æquales ſunt, reſtabit F D cum $\frac{3}{2}$ D G, æqualis F B cum $\frac{3}{2}$ B S. Sed $\frac{3}{2}$ D G æquales ſunt $\frac{3}{2}$ E S. Ergo F D eſt æqualis F B cum $\frac{3}{2}$ B E. Sed D C erat æqualis $\frac{3}{2}$ E B. Ergo ſublatis utrimque longitudinibus illis æqualibus, reſtabit C F æqualis F B; ac proinde apparet undam, cujus ſemidiameter eſt D C, contingere arcum B P, quo momento lumen emiſſum è puncto L pervenit in B per rectam L B. Eâdem ratione demonſtrabitur, quod intra idem illud momentum, lumen emiſſum à quolibet alio radio, ut L M, M N, diffuderit motum, qui terminatur ab arcu B P. Unde ſequitur, ut ſæpius dictum eſt, propagationem undæ A H, permeatâ ſpiſſitudine vitri, futuram eſſe undam ſphæricam B P; cujus partes omnes progredi debent ad centrum F per lineas rectas, quæ ſunt radii luminis ad centrum F. Quod demonſtrandum erat. Eodem autem modo reperientur lineæ illæ curvæ in quolibet caſu, qui proponi poteſt, ut patebit ex uno alterove exemplo, quod addam.

Sit data ſuperficies vitri A K, facta per revolutionem lineæ A K, curvæ aut rectæ, circum axem B A. Sit etiam TAB. VIII. Fig. 3.

tiam datum in axe punctum L; & sit B A spissitudo vitri; reperiendaque proponatur altera superficies K B D, quæ, excipiens radios parallelos ipsi B A, eosdem ita dirigat, ut, postquam rupti iterum sunt in superficie data A K, coeant omnes in punctum L

E puncto L, ad aliquod punctum lineæ datæ A K, ducatur recta L G, quâ spectatâ tanquam radio aliquo luminis, reperietur refractio illius G D, quæ producta hinc aut illinc offendet rectam B L, ut hîc in V. Erigatur deinde in A B perpendicularis B C, quæ repræsentabit undam aliquam luminis ortam puncto F infinite distanti, quia posuimus radios parallelos. Necesse igitur est partes omnes undæ illius B C perveniant eodem tempore ad punctum L, vel partes universæ alicujus undæ, manantis è puncto L, uno eodemque instanti ad rectam B C perveniant. Quamobrem reperiendum est in linea V G D punctum D, ita ut, ductâ D C parallelâ ad A B, summa C D & $\frac{3}{2}$ D G & G L, æqualis sit $\frac{3}{2}$ A B cum A L. Sive hinc & inde sublatâ G L, quæ data est, oportet ut C D cum $\frac{3}{2}$ D G æqualis sit lineæ alicui datæ: quod problema facilius est quam illud præcedentis constructionis. Punctum D, ita repertum, erit unum ex iis per quæ curva transire debet, & demonstratio eadem futura est ac ante. Ex qua probabitur undas emissas è puncto L, ubi permeavere vitrum K A K B, suscepturas esse formam linearum rectarum, ut B C; quod idem est ac si dicas radios parallelos evadere. Unde reciprocè sequitur eos, si paralleli incidant in superficiem K D B, coituros in punctum L.

TAB. VIII. Fig 4. Sit etiam data superficies A K, qualem velis, facta per revolutionem circa axem A B; positâ spissitudine medii vitri A B. Datum insuper sit in axe punctum L pone vitrum, in quod punctum ponitur tendere radios incidentes in superficiem A K; reperiendaque præterea proponatur superficies B D, quæ radios vitro egredientes perinde avertit,

tit, ac si venirent è puncto F quod est ante idem vitrum.

Sumpto aliquo puncto G in linea A K, & ductâ rectâ I G L, pars illius G I repræsentabit unum è radiis incidentibus, cujus reperietur refractio G V; atque in ea reperiendum est punctum D, unum ex iis per quæ curva debet transire. Ponamus jam repertum esse, & è centro L describatur arcus circuli G T, secans rectam A B in T, ubi L G major sit quam L A; aliter enim describendus esset ex eodem centro arcus A H, qui secat rectam L G in H. Arcus ille G T (aut in altero casu A H) erit unda una luminis incidentis, cujus radii tendunt versùs L. Pariter è centro F describatur arcus circuli D Q, qui repræsentabit undam exeuntem è puncto F.

Oportet igitur ut unda T G, permeato vitro, efformet undam Q D, eamque ad rem video tempus luminis per G D intra vitrum debere esse æquale tempori per T A, A B, & B Q, è quibus unica A B etiam est intra vitrum. Sive, sumptâ A S æquali $\frac{2}{3}$ A T, video $\frac{3}{2}$ G D debere esse æquales $\frac{3}{2}$ S B $+$ B Q; & sublato utroque ab F D vel F Q, F D minus $\frac{3}{2}$ G D, debere esse æqualem F B minus $\frac{3}{2}$ S B. Quæ ultima differentia est longitudo data, & satis est, è puncto dato F, duci rectam F D in V G, ut hoc ita sit. Quod problema plane simile est ei, quod inservit primæ ex illis constructionibus, ubi F D $+$ $\frac{3}{2}$ G D æquari debet longitudini datæ.

In demonstratione autem observandum est, ubi arcus B C incidit intra vitrum, concipiendum esse arcum aliquem, qui illi concentricus sit, nempe R X, ultra Q D. Cumque demonstratum fuerit partem C undæ G T pervenire eodem temporis intervallo in D, quo pars T in Q, quod liquet facilè ex constructione ipsa; manifestum porro erit undam emissam è puncto D contacturam arcum R X, quo momento pars Q pervenerit in R: adeoque

arcum

arcum hunc eodem inſtanti terminare motum, qui venit ex unda T G, unde ſequuntur reliqua.

Monſtratâ linearum illarum curvarum inventione, quæ inſerviunt perfecto radiorum concurſui, reſtat ut rem unam notatu dignam explicemus de refractione inordinata ſuperficierum ſphæricarum, planarum, aliarumque; quæ ſi ignoraretur, poſſent in dubium vocari quæ ſæpius diximus, ſcilicet radios luminis eſſe lineas rectas, quæ ſecant, ad angulos rectos, undas inde diffuſas. Etenim radiis, qui incidunt paralleli in ſuperficiem aliquam ſphæ-
TAB. VIII. Fig. 5. ricam, puta A F E, ſeſe mutuo interſecantibus, poſt refractionem ſuam, in punctis variis, quemadmodum hæc figura exhibet; quales poterunt eſſe undæ luminis intra diaphanum, quæ ſecentur ad angulos rectos à convergentibus radiis? Enimvero nequeunt eſſe ſphæricæ. Et quo evadent undæ illæ, poſtquam dicti radii ſeſe interſecare incipiunt? In hac difficultate enodandâ, videbimus aliquid contingere notatu digniſſimum, undaſque nihilo ſecius ſubſiſtere ſemper, licet non totæ tranſeant, velut fit in vitris compoſitis, de quibus modo egimus.

Ex iis quæ ſupra demonſtrata fuere, recta A D, quæ è vertice ſphæræ ducta eſt perpendicularis axi ad quem radii veniunt paralleli, repræſentat undam luminis; & quo temporis puncto pars illius D pervenerit ad ſuperficiem ſphæricam A G E in E, cæteræ partes progreſſæ ſunt ad eandem ſuperficiem in F, G, H &c.: & efformarunt ſuas undas ſphæricas, quarum puncta illa ſunt centra. Ac ſuperficies E K, quam univerſæ undæ illæ contingent, erit propagatio undæ A D intra ſphæram, quo momento pars D venit in E. Linea autem E K non eſt arcus circuli, ſed linea curva facta per evolutionem alterius curvæ E N C, quæ contingit omnes radios H L, G M, F O, &c. qui ſunt refractiones radiorum parallelorum; fingendo filum eſſe aliquod jacens in convexitate E N C, quod dum evolvitur deſcribat extremitate ſua E cur-

curvam illam E K. Posito enim curvam illam sic descriptam esse, demonstrabimus undas formatas a centris F, G, H &c. illam tacturas esse omnes.

Constat curvam E K, cœterasque omnes, descriptas per evolutionem curvæ E N C, positis longitudinibus diversis fili, secturas esse radios omnes H L, G M, F O &c. ad angulos rectos; adeo ut partes earum, duabus ejusmodi curvis interceptæ, futuræ sint omnes æquales: hoc enim sequitur ex iis quæ in tractatu nostro *de Motu Pendulorum* demonstravimus. Positis autem radiis incidentibus tanquam infinite sibi mutuo vicinis, si duo considerentur, puta R G, T F; ducaturque G Q perpendicularis ad R G, & curva F S, quæ secat G M in P, descripta sit, per evolutionem curvæ N C, incipiendo ab F, quo usque sumo filum se extendere: potest accipi particula illius F P pro recta, quæ perpendicularis sit radio G M, itemque arcus G F pro lineâ recta. Verùm cum G M sit refractio radii R G, & F P perpendicularis illi, F Q se habebit ad G P, ut 3 ad 2, id est in proportione refractionis, sicut monstratum est supra, in explicanda Cartesii inventione. Idem contingit in omnibus minoribus arcubus G H, H A, &c. Scilicet in quadrilateris quibus ii continentur, latus parallelum axi est ad suum oppositum ut 3 ad 2. Ergo etiam ut 3 ad 2, ita erit summa horum ad illorum summam, id est T F ad A S, D E ad A K, & B E ad S K aut F V, posito quod V sit intersectio curvæ E K, & radii F O. Verum, factâ F B perpendiculari ad D E; ut 3 ad 2, ita quoque est B E ad Semidiametrum undæ sphæricæ emissæ è puncto F, dum lumen extra diaphanum pervasit spacium B E. Ergo apparet undam illam secturam esse radium F M in eodem puncto V, ubi secatur ad angulos rectos a curva E K; adeoque fore ut unda curvam illam tanget. Eàdem ratione probabitur idem esse in cœteris omnibus undis, natis è punctis G, H, &c. scilicet tacturas esse curvam E K, quo momento pars D undæ E D pervenerit in E.

M Ut

Ut autem doceamus nunc quò undæ illæ evadant, postquam radii se intersecare incipiunt: Dico eas inde se replicare & constare duabus partibus cohærentibus; quarum altera est curva facta per evolutionem curvæ ENC in quodam sensu, altera vero curva quoque per evolutionem ejusdem in altero sensu facta. Ita unda KE, procedendo concursum versùs, fit *abc*, cujus pars *ab* efficitur per evolutionem *b*C, quæ portio est curvæ ENC, dum extremitas C manet fixa, pars vero *bc* efficitur per evolutionem portionis *b*E, dum extremitas E immota manet. Deinde eadem unda fit *def*, tum *ghk*, demum CI: unde tunc extenditur absque ullo plexu, sed semper per lineas curvas formatas per evolutionem curvæ ENC, auctæ lineâ rectâ versùs C.

Quinimmo in curva istâ est pars EN recta, quum N est punctum ubi incidit perpendicularis ex centro sphæræ X, in refractionem radii DE, qui, ut nunc pono, sphæram contingit. E puncto autem N incipiunt replicari undæ luminis, ad extremitatem usque curvæ C, quæ reperitur faciendo ut AC ad CX sit in proportione refractionis, ut hîc, 3 ad 2.

Reperiuntur etiam quælibet alia puncta curvæ NC, ope theorematis quod demonstravit Barrow in duodecima lectione optica, quamquam in alium finem. Et notandum est, posse dari lineam rectam æqualem curvæ illi. Quandoquidem enim simul cum recta NE æqualis est rectæ notæ, quia DE ad AK est in refractionis proportione; ergo patet, demptâ EN de CK, residuum fore æquale curvæ NC.

TAB. VIII. Fig. 6. Reperientur pariter undæ replicatæ in reflexione speculi concavi sphærici. Esto ABC sectio per axem hemisphærii alicujus cavi, cujus centrum est D, & axis DB, ad quem sumo radios luminis parallelos. Reflexiones omnes radiorum illorum, qui incidunt in quadrantem circuli AB, tangent lineam curvam AFE, cujus extre-

extremitas E eſt in foco hemiſphærii, id eſt in puncto quod diametrum in duas partes æquales dividit: puncta vero, per quæ curva illa tranſire debet, reperire licet, ſumpto ex A arcu AO, factoque duplo ejus arcus OP; cujus ſubtendens dividenda eſt, ita ut pars FP ſit tripla partis FO: tunc enim F unum eſt è punctis quæſitis.

Et quemadmodum radii paralleli nil aliud ſint præter lineas perpendiculares undarum incidentium in ſuperficiem concavam, quæ ſunt parallelæ AD; liquebit eas, prout offendunt ſuperficiem AB, formare, reflectendo ſe, undas replicatas, quæ conſtant e duabus curvis eisque natis ex evolutionibus oppoſitis partium curvæ AFE, ſic, ſumptâ AD pro unda incidenti, ubi pars AG occurrit ſuperficiei AI, id eſt ubi pars G pervenerit in I; tunc curvæ HF, FI natæ ex evolutionibus curvarum FA, FE, quæ incipiunt ambæ ab F, facient ſimul propagationem partis AG. Ac paulo poſt, ubi pars AK offenderit ſuperficiem AM, parte K poſitâ in M, tunc curvæ LN, NM partis illius propagationem unà efficient. Atque adeo unda illa replicata procedet ſemper, donec extremitas N ad focum E pervenerit. Curvam AFE videre eſt in fumo vel in pulvere volanti, ubi ſpeculum concavum oppoſitum eſt ſoli; ſciendumque eſt illam nihil aliud eſſe, præter eam quæ deſcribitur a puncto E peripheriæ circuli EB, cum circumvolvitur circulus ille in alterum cujus ſemidiameter eſt ED, & centrum D; adeoque curva illa eſt ſpecies quædam Cycloidis, at cujus puncta Geometrice reperiri queunt.

Longitudo illius æqualis eſt præciſe $\frac{3}{4}$ diametri ſphæræ; quod reperitur demonſtraturque ope undarum illarum, fere ut curvæ ſuperioris menſura: quanquam poſſet etiam demonſtrari aliis methodis quas prætermitto,

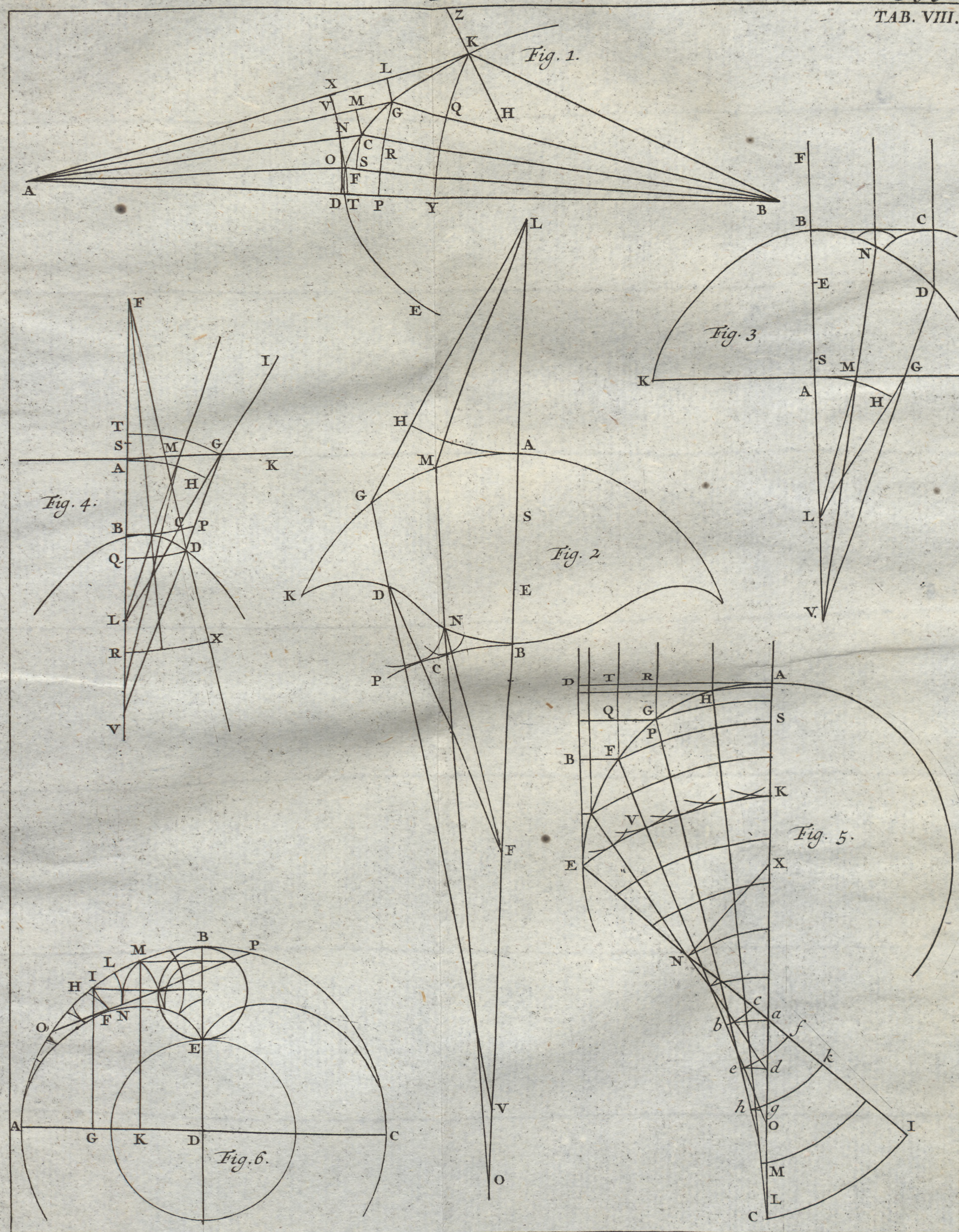
quia hoc est extra propositum meum. Spatium AOBEFA, comprehensum arcu quadrantis circuli, rectâ BE, & curvâ EFA, æquale est quartæ parti quadrantis circuli DAB.

FINIS.





TAB. VIII.



DISSERTATIO
DE
CAUSA GRAVITATIS,
AUCTORE

C. H. à Z.



PRÆFATIO.

NAtura vias sequitur obscuras ita atque intricatas, ubi corpora, quæ vocamus gravia, terram versùs præcipitat, ut quæcumque adhibeatur aut attentio aut industria, nihil inibi sensus detegere queant. Idipsum Philosophos coegit causam admirabilis illius rei in corporibus ipsis solùm quærere, & tribuere illam qualitati alicui internæ & inhærenti, quæ corpora ad inferiora & versus terræ centrum impelleret; aut nescio cui appetitui partium ut toti se unirent. Quod erat non causas exponere, sed ponere principia obscura & intellecta à nemine. Ignosci quidem poterat iis, qui sæpenumero solutionibus ejusmodi contenti erant, non vero Democrito ejusque discipulis, qui, cum omnia ex atomis solis explicare susceperant, gravitatem solam adjunxere corporibus terrestribus atomisque ipsis; neque inquisivere unde oriri posset Ex autoribus vero & instauratoribus hodiernis philosophiæ, multi judicavere aliquid extra corpora statuendum esse, ex quo oriantur attractiones & fugæ quas in iis animadvertimus; verum haud multo magis in causas penetrarunt quam antiquiores illi Physici. Alii enim confugerunt ad aëra aliquem subtilem & gravem, qui corpora premeret, cogeretque ita descendere; (illud vero est jam supponere gravitatem & ita repugnat legibus mechanicis, velle ut materia liquida & gravis deorsum mitteret corpora quibus circumfusa est, ut è contrario ea deberet sursum mittere, posito, quod ea à se ipsis nullum habeant pondus, quemadmodum lagenam inanem, si aquâ merseris, aqua evehit) Alii vero ad spiritus, sive emanationes immateriales: hoc enim nullam lucem rei afferebat, quandoquidem concipere non possumus, quomodo aliquid immateriale substantiam corpoream movere valeat.

Cartesius meliùs cognovit, quam alii ante eum omnes nihil prorsus in physica intelligi posse, nisi quæ referri queant ad prin-

principia quæ captum non excedant humanæ mentis; cujusmodi sunt ea quæ pendent, & à corporibus spectatis sine qualitatibus ullis, & à motibus corporum. Sed quoniam maxima difficultas in eo erat, ut ostenderet quo pacto tot res diversæ ex his solis principiis sequerentur, exitum minime prosperum habuit in plurimis argumentis quæ examinanda sumpserat, ac præcipue, meo quidem judicio, in iis quæ ad gravitatem pertinent. Id intelliget quisque ex iis quæ quibusdam locis notavi in illius scripta, ubi plura sane observare potuissem. Attamen tentamina illius, infelicia licet, viam mihi aperuisse ad ea, quæ inveni, fateor.

Non autem hæc edo, quasi omni dubio carerent omnique exceptione forent majora: Nimis difficile est, eò pervenire in hujusmodi inquisitionibus. Putem tamen quod, si præcipua, quâ nitor, hypothesis vera non sit, parum spei supererit, fore, ut vera reperiatur, si consistamus intra limites veræ sanæque Philosophiæ.

Quæ autem hîc dico, quatenus ad solam causam gravitatis pertinent, non videbuntur nova iis qui tractatum Physicum Rohaltii legerint, quia inibi mea theoria describitur fere tota. postquam philosophus ille vidit meum experimentum circa aquam in modum turbinis circumactam, audivitque quomodo accommodarem ad gravitatem (ut ipse ingenue fatetur) meam opinionem tam verisimilem duxit ut voluerit sequi. Verum cum meis inventis Cartesiana & sua immiscet, multaque hanc rem spectantia prætermittit, quorum & quædam scire non potuit, explicare volui, quomodo ipse rem tractaverim.

Maxima pars hujusce libelli scripta est cum Lutetiæ degerem, ac descripta in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, *ad eum usque locum ubi loquor de alteratione quæ pendulis accidit à motu terræ. Reliquum post plures annos addidi, ac demum additionem scripsi, eâ occasione quam in principio indicatam reperias.*

DE
GRAVITATIS CAUSA
DISSERTATIO.

UT intellectu facilem reperiamus gravitatis causam, videndum est quî fieri possit, nullis aliis positis in rerum natura corporibus præter ea, quæ ex eadem materia conflata sunt, & in quibus nulla consideratur propensio ad accedendum ad se mutuo, sed tantum variæ magnitudines, figuræ, motionesque; videndum, inquam, est quî fieri possit ut plurima tamen ex his corporibus actu tendant centrum idem versùs, ibique maneant immota; quod vulgare & præcipuum est ejus, quod gravitatem vocamus, phænomenon.

Simplicitas principiorum memoratorum pauca eligenda relinquit. Etenim unicuique patet statim, non posse probabiliter tribui figuræ aut tenuitati corpusculorum effectum hujusmodi; gravitas enim cum sit nisus quidam inclinatiove ad motum, debet verisimiliter oriri ab aliquo motu. Itaque restat tantum, ut investigemus quo modo hic agere, & in quibus corporibus obtinere possit.

Si corpora spectemus absque qualitate illa quam gravitatem nominamus, motum naturaliter habent aut rectum aut circularem. Prior iis convenit, ubi sine impedimento ullo moventur, alter ubi circum aliquod centrum retinentur, aut circa proprium circumvolvuntur centrum. Novimus aliquomodo naturam motus recti, & leges, juxta quas corpora alia aliis occurrentia motum suum communicent. Sed quamdiu unicum illud genus motus consideramus, reflexionesque quæ inde oriuntur inter partes

materiæ, nihil videmus, quod ea centrum aliquod versus ire compellat. Necessario igitur deveniendum est ad proprietates motûs circularis, & videndum num qua ex iis nobis inservire queat.

Non me latet, Cartesium in physica sua conatum esse explicare gravitatem ex motu certæ cujusdam materiæ quæ circa terram volvitur: neque parum est quod hæc ille excogitaverit primus. Sed ex iis, quæ in sequentibus noto, apparebit, in quo ratio illius à mea discrepans sit, ut & in quo deficere mihi videatur.

Consideravit, pariter ac ego, corporum circulariter circumactorum nisum, ut à centro recedant, quâ de re non licet dubitare per experimenta. Enimvero rotando lapidem in funda, animadvertimus manum nostram à lapide illo attrahi, idque eo validius, quo validius rotatur funda, adeo ut etiam funis rumpi possit. Eamdem illam proprietatem circularis motûs jam antea ostendi, affigendo plura corpora gravia tabulæ rotundæ quæ in centro terebrata erat, & circa axem circumagebatur; & reperi determinationem virium illius & plurima theoremata ad eam pertinentia, quæ videre est ad calcem mei *de motu Pendulorum* libri. Dico, verbi gratiâ, quod si corpus aliquod in orbem actum in extremitates funis extensi horizontaliter, eâ velocitate agatur, quam lapsu suo adipisci possit, cadendo ab altitudine, quæ æqualis sit dimidiæ parti funis, id est, quartæ parti diametri circumferentiæ quam describit; funis ea vi trahetur quâ teneret corpus idem in aëre suspensum.

Nisus igitur ille corporum ut à centro recedant comitatur semper circularem motum; & quamvis effectus ejusmodi gravitati prorsus contrarius videatur, objectumque sit Copernico, debere fieri, per vertiginem terræ intra 24 horas, ut domus hominesque in aërem præcipites dentur; probabo tamen nisum illum quem corpora in orbem circumacta habent ad fugiendum à centro in causa esse,

cur

cur alia corpora versus idem centrum concurrant.

Fingamus circa centrum D volvi materiam fluidam contentam spacio A B C, quo exire nequeat, propter alia circumjacentia corpora. Constat partes omnes fluidi illius conari recedere à centro D, sed frustra, quia nimirum partes, quæ deberent in illarum locum succedere, non minus conantur à centro illo fugere. Verum si qua esset pars illius materiæ, puta E, quæ motum circularem cœterarum non sequeretur, aut quæ lentius moveretur quam aliæ, dico quod ea centrum versus impelletur. Quandoquidem enim aut non conatur aut minus conatur quam partes propinquæ ab eo recedere, cedet actioni earum, quæ minus distant à centro D, & ita locum dabit cœteris accedendo ad illud, quoniam aliter locum ipsis cedere nequit. TAB. IX. Fig. 1.

Hoc autem unusquisque videre potest ex experimento, quod consultò ad id feceram, neque indignum est observatu, quippe quod ante oculos gravitatis imaginem statuat. Vas cylindricum, cujus diameter habebat 8 aut 10 pollices, cujus fundus candidus erat & lævis, & altitudo latitudine minor erat dimidiâ aut tertiâ parte, aquâ implevi, cui laccam sigillarem minutam injeci, quæ cum aquâ paulo gravior esset, statim descendit. Deinde vasculum operui vitro, quod aquam ipsam immediate contingeret, cœmentoque circumlini curavi ut nihil inde effugeret. Quo facto vas tabulæ rotundæ de qua paulo ante dixi imposui, eâque circumactâ, animadverti frusta laccæ, quæ fundum tangebant, sequebanturque melius motum vasculi, quam aqua, circum ejus oras se disposuisse, quia majorem vim centrifugam habebant quam aqua. Sed cum aliquamdiu mensam circumegissem, & aqua circularem motum magis magisque adepta esset, subito tabulam stiti, eodemque momento lacca ad centrum acervatim confluxit; quæ res mihi effectum gravitatis videndum dedit. Hoc vero factum

eſt, quia aqua, non obſtante vaſculi quiete, motum ſuum circularem retinuerat, ac proinde quoque vim ſuam centrifugam; lacca vero motum omnem aut fere integrum amiſerat, quia contingebat fundum, qui immotus hærebat. Obſervavi quoque pulverem illum ad centrum per lineas ſpirales deſcendere, quia nimirum ab aqua adhuc paululum abripiebatur. Quod ſi autem hoc in vaſe collocetur aliquod corpus, ita ut motum aquæ ſequi nequeat, ſed ſolummodo ad centrum tendere, tum illuc rectâ deſcendet.
TAB. IX. Fig. 1. Eſto, verbi gratiâ, L exiguus globus qui poſſit libere in fundo volvi, inter fila A A, B B, tertiumque K K paulò ad altitudinem majorem horizontaliter per medium vas extenſa. Statim atque vas quieverit, globus ille centrum D petet. Et obſervandum eſt hocce ultimo in experimento poſſe effici corpus L ejuſdem gravitatis ac aqua, & negotium meliustunc ſucceſſurum; adeo ut, abſque ullâ differentiâ gravitatis corporum, quæ ſunt in vaſe, motus ſolus hìc effectum gravitatis producat.

Experimentum, quod Carteſius in una ex epiſtolis ſuis, quæ typis editæ ſunt, proponit, à noſtro multum differt. Nam ille implet vas A B C minutis globis plumbeis, quibus miſcet lignum in exiguas partes diſciſſum aut aliam quamcumque plumbo leviorem materiam; iiſque omnibus ſimul circumactis, ait lignum verſus mediam partem vaſis impulſum iri; quod non difficile crediderim, modo continuo leviter percutiantur margines vaſis, ut facilius utraque materia ſe ſeparet. At hoc quod hic evenit minime idoneum eſt ad repræſentandum gravitatis effectum, cum inde concludi deberet, ea corpora graviora eſſe in quibus minus ineſt materiæ; quod contrarium eſt iis quæ in vera gravitate animadvertere eſt. Idem in aliâ epiſtolâ dicit injicienda eſſe in aquam turbinis in modum abreptam exigua fragmenta ligni, quæ inquit, verſus mediam aquam enatabunt. Quod ſi de ligno intelligat quod aquæ innatat, ut videtur facere, nulla erit convenientia;

ſi

si vero illud velit ad fundum præcipitari, idem erit experimentum ac illud, quod paulo ante proposui. Lignumque circa centrum coibit: sed id continget, quia, tacto fundo vasis, motus circularis illius retardatus fuerit, de hac autem causa Cartesius tacuit.

Reperto itaque semel in natura effectu qui similis sit effectui gravitatis & cujus causa sit perspecta, superest ut videamus num possimus ponere, simile quid respectu Terræ contingere, id est, num detur motus materiæ qui corpora centrum versus cogat descendere, simulque ad cœtera omnia gravitatis phænomena accommodatus sit.

Posito terram motu diurno rapi, aeraque & æthera qui illam cingunt, habere eumdem motum, nihil adhuc in eo est unde gravitas oriri queat; cum, ex experimento paulo superius narrato, corpora terrena non deberent sequi motum circularem materiæ cœlestis, sed respectu illius esse quasi quieta, si ab illa versus centrum impelli debuissent.

Quod si quis vellet materiam cœlestem eandem in partem volvi cum terra, sed multo velociùs; sequeretur fore ut motus ille concitatus materiæ, quæ totà, continuo, & eandem partem versus pergeret, sentiretur, secumque abriperet corpora quæ in terra sunt, quemadmodum aqua in experimento nostro secum tulit laccam: quod tamen contingit minime. Sed præterea motus ille, circum axem terræ, non posset in omni casu impellere corpora quæ eumdem motum non sequuntur, nisi versùs eumdem axem; ac proinde corpora gravia non caderent perpendiculariter ad horizontem, sed ad axem mundi: quod cum experientia pugnat.

Ut explicem igitur gravitatem, qualem ipsam concipio, sumam, in spacio sphærico, quod continet terram corporaque terræ circumflua, ad magnum intervallum usque dari materiam quamdam fluidam quæ constet particulis tenuissimis, varieque & rapidissime in omnem partem agi-

agitetur. Quæ cum egredi nequeat ſpatio illo, quod alia corpora ambiunt, dico quod motus ejus fieri debet partim circularis circa centrum; neque ita tamen ut tota verſùs eamdem partem volvatur: ſed tantum ut plerique ex variis ejus motibus fiant in ſuperficiebus ſphæricis circa centrum ejuſdem ſpacii, quod idcirco fit etiam centrum terræ.

Illius autem motus circularis cauſa eſt, quia materia aliquo ſpacio contenta movetur facilius eum in modum quam per motus rectos ſibi invicem contrarios, qui reflectendo ſe mutuo, (quia materia egredi nequit è ſpacio quo includitur) tandem in circulares mutantur.

Effectumque illum motûs obſervare licet ubi argentum per Cupellam probatur; globus enim plumbeus argento intermixtus, cum partes habeat violenter agitatas à calore, indeſinenter circum centrum ſuum volvitur, nunc hinc nunc illinc continuo locum ſuum mutans: idque ſummâ celeritate, ut oculus vix poſſit animadvertere. Idem contingit in gutta ſebi candelarum, quando, ſuſpenſa ad apicem emunctorii (*mouchettes*) admovetur candelæ, tunc enim velocitate quam maximâ circumvolvitur.

Fateor guttam illam ſæpius ſe totam circumagere in hanc vel illam partem, prout flamma candelæ eam tangit. Verum in materia mea cœleſti idem fieri non debet, quia ubi ſemel habet motum in quaſlibet partes, neceſſe eſt ut retineat ſemper, etſi mutatus ſit in ſphæricum; quandoquidem nulla eſt cauſa cur motus partis unius in partis alterius motum ita ageret, ut tota maſſa neceſſario in eamdem partem volveretur. Quin immo è contrario lex naturæ, de qua alibi dixi, ejuſmodi eſt, in mutuo occurſu corporum, quæ diverſimode agitata ſunt, ut eamdem ſemper quantitatem motus eamdem partem verſus retineant.

Etiamſi autem motus illi circulares, in tot tamque varias partes intra idem ſpacium, videantur debere ſibi invicem

vicem contrariari, & se mutuo sæpe impedire; tamen, per mobilitatem magnam materiæ & exiguitatem partium illius quam nequidem imaginandi vi assequi possumus, fit ut varias agitationes illas facile patiatur. Ubi turbata est aqua in phiala vitrea, videre est quot & quam diversis modis partes ejus agitari valeant. Cogitet unusquisque liquiditatem materiæ cœlestis longe majorem liquiditate aquæ, quæ cum constet partibus gravibus aliisque in alias congestis, ideo ad motum iners fit. Contra vero materia cœlestis, quippe quæ libere moveatur quoquo versus, facillime accipit varias impressiones, à variis occursibus suarum partium, vel ab impulsione aliorum corporum vel levissimâ; quæ si ita non essent, aer non adeo facile, ac jam fit, motæ manui cederet. Itaque considerandum est motus circulares materiæ illius fluidæ, circa terram, sæpissime aut interrumpi aut mutari in alios; sed tamen multo plures perstare quam deflectere à via sua: quod ad propositum nostrum satis est.

His positis haud difficile est explicare quî motus ille gravitatem producat. Si enim materiam inter fluidam, quæ dicto spatio volutatur, partes sint multo crassiores quam eæ ex quibus constat, aut corpora facta ex pluribus particulis simul conjunctis & si illa corpora non sequantur rapidum dictæ materiæ motum, necessario impellentur versus centrum motus, ibique, si sufficiens adsit copia, formabunt globum terrenum, posito illum jam non existere. Hoc autem proficiscitur eâdem causa, quæ facit, in experimento nostro, ut lacca sigillaris ad centrum vasis coeat. In hoc igitur posita est probabiliter gravitas corporum: quæ dici potest nihil esse præter conatum materiæ fluidæ, quæ in orbem volvitur circum telluris centrum quoquo versus, ut à centro illo fugiat, eòque adigat corpora quæ motum eum non sequuntur.

Ratio vero, cur corpora gravia, quæ videmus descendere, non sequantur motum sphæricum materiæ fluidæ, satis

ſatis clara eſt, cum enim ſit motus ejus modi quoquo verſus, impulſiones quas corpus aliquod inde accipit, tam ſubito aliæ alias excipiunt, ut minus intercedat temporis quam neceſſe eſt quò motum ſenſibilem acquirat. Quandoquidem autem hæc ratio ſola non ſufficit ad impediendum quominus corpora tenuiſſima eorum, quæ ſub aſpectum cadere poſſint, puta pulverem in aëre volantem, hinc & inde pellantur rapiditate motus illius; ſciendum eſt exigua illa corpora non innatare ſoli materiæ liquidæ quæ gravitatem efficit: ſed præter hanc eſſe alias materias easque conſtantes è craſſioribus particulis, quæ maximam ſpatii partem occupant quod nos ambit imo & cœlum ipſum. Particulæ autem illæ, licet variis modis agitatæ & inter ſe reflexæ, tamen non ſequuntur motum ſubitum materiæ liquidæ, quoniam, cum ſint aut contiguæ aut vicinæ, nimia magna quantitas deberet ſimul moveri. Notum eſt circa terram dari primò particulas aëris, quas ſtatim probaturi ſumus craſſiores eſſe particulis materiæ noſtræ fluidæ. Dico inſuper aliam eſſe materiam cujus particulæ ſunt aëre tenuiores & materiâ fluidâ craſſiores, quod confirmatur exprimento noſtro, quod machinæ pneumaticæ ope fit. Ilico enim obſervare licet effectum materiæ alicujus inviſibilis, quæ gravitat, ubi nullus aer eſt, quoniam aquam tenet ſuſpenſam in tubo vitreo, cujus pars aperta in aliud vas aquæ plenum immerſa eſt; ibidemque facit fluere aquam Siphonis recurvi, quemadmodum in aëre fieret: modo, his in experimentis, aqua purgata fuerit aëre, quod fit, ſi eam paucis horis in vacuo colloces. Inde apparet primùm particulas corporis illius gravis inviſibiliſque multo minores eſſe particulis aëris, ut pote quæ permeant vitrum, quod excludit aëra, ibique gravitatem ſuam demonſtrent; ac deinde patet particulas eaſdem debere tamen craſſiores eſſe materiâ fluidâ, quæ gravitatis cauſa eſt, ut corpus ex illis coaleſcens non ſequatur hujus motum, quod ſi præſtaret,

ret, non esset grave. Potest fieri ut nos circumfluant plurima quoque alia materiæ genera, eaque alia aliis tenuiora, quibus tamen omnibus materia fluida, quæ gravitatis causa est, tenuior sit; eaque omnia igitur obstabunt, quo minus pulveris moti grana abripiantur motu illius materiæ, cum hæc eundem motum non sequantur.

Neque est ut pro commentitiis habeantur varii illi gradus exiguorum corpusculorum, eorumdemque admirabilis tenuitas. Etiamsi enim quædam in nobis sit propensio ad credendum corpora, quæ vix visibilia sunt, jam fere esse tam tenuia quam fieri possunt, ratio tamen nos docet eandem proportionem quam mons habet ad granum arenæ, granum illud posse habere ad alterum granum, istudque ad tertium aliquod, & sic quam diu velis.

Summa vero tenuitas partium materiæ nostræ fluidæ quoque summè necessaria est ad explicandum insigne gravitatis phænomenon, cur scilicet corpora gravia inclusa vase aliquo ex vitro, aut metallo, aut alia quavis materiâ, semper æque gravitent. Quamobrem necesse est materia nostra fluida liberrime pervadat corpora omnia vel solidissima, & eâdem facilitate quâ aëra ipsum.

Atque hoc confirmatur ex eo quod, si illa permeandi facilitate destitueretur, lagena vitrea æque gravis esset ac corpus solidum ex vitro ejusdem magnitudinis; corporaque omnia solida ejusdem voluminis æque gravia essent: quandoquidem, ex theoria nostra, gravitas cujusque corporis determinata est ex quantitate materiæ fluidæ, quæ debet in ejus locum cedere.

Materia igitur illa facile transit per interstitia particularum, è quibus coalescunt corpora, non vero per particulas ipsas; & quod varia corpora varie gravia sint, ut v. g. lapides, metalla &c. inde fit, quia, quæ graviora sunt, plures ejusmodi particulas continent, non numero, sed volumine: in earum enim locum mate-

ria fluida tantum cedere potest. Quoniam autem alicui dubium esse posset, utrum particulæ illæ sint prorsus solidæ, quippe quæ à materia nostra penetrari nequeunt; (Si enim solidæ non sint, aut etiam si sint vacuæ, deberent idem efficere, ex ea ratione quam modo adduxi) demonstrabo eas solidas prorsus esse, adeoque gravitatem corporum præcise sequi proportionem materiæ, ex quâ componuntur.

In quem finem id observatum volo, quod contingit in collisu duorum corporum quæ sibi occurrunt horizontali motu. Certum est, resistentiam, quâ corpora motui horrizontali obnituntur, ut globus marmoreus vel plumbeus lævi tabulæ impositus, non oriri à pondere eorum terram versus, quandoquidem motus lateralis non eos à terra removet, adeoque nullatenus contrariatur actioni gravitatis, quæ deorsum illa impellit.

Sola ergo quantitas materiæ in unum compactæ, quam unumquodque corpus continet, causa est hujus resistentiæ; adeoque si 2 corpora æqualem quantitatem materiæ contineant, æqualiter reflectentur, vel ambo immota consistent, prout aut dura aut mollia fuerint. Sed experientia docet, quoties duo corpora aut æqualiter reflectuntur aut cursum sistunt, postquam æquali celeritate sibi occurrerint, corpora illa æque gravia esse. Ergo sequitur, quod ea quæ æqualem continent materiæ quantitatem æqualis sunt gravitatis: quod demonstrandum erat.

Cartesius hac de re longe alia existimabat, ut & de meatu libero materiæ quæ gravitatis causa est, per corpora, in quæ agit. Quod enim hocce posterius spectat, putabat illam materiam impediri, occursu terræ, quominus pergeret moveri rectâ lineâ; atque ea de causa à terra, quantum posset, recedere. Qua in re mihi videtur non attendisse satis ad proprietatem illam gravitatis de quâ modo disserui; si enim motus materiæ illius impeditus sit à terra, non amplius libere pervadet metalla neque vi-

vitrum. Unde sequeretur plumbum inclusum phialâ amissurum esse pondus suum respectu phialæ illius, aut saltem pondus illud diminutum iri. Præterea, si corpus grave in puteo aut in foveâ vel profundo cuniculo collocaretur, multum de gravitate sua deberet perdere. Sed quantum scio, aliquid deperdi experientia non ostendit.

Quod ad alterum attinet, contendit Cartesius, etiamsi massa auri esset vigesies gravior quam portio aliqua aquæ ejusdem magnitudinis, aurum tamen tantummodò habere quater aut quinquies tantum materiæ quantum aqua: primò, quia ab utraque massa deducendum est (dicere potius debuerat adjiciendum) pondus æquale propter aërem in quo ponderantur; ac dein, quia aqua, & cæteri liquores, aliquam levitatem habent respectu corporum durorum, quoniam nempe priorum partes perpetuo agitantur motu.

Sed possumus respondere priori argumento, cum gravitas aëris, qui nos circumdat, sit ad gravitatem aquæ tantum ut 1 ad 800, id esse parum ponderis, quod æqualiter addendum erit ponderi, tum aëris tum aquæ, reperto bilancis ope. Altera vero ratio, si bona esset, eadem portio aquæ multo gravior esset congelata quam liquida, metallique massa gravior quam metallum idem liquefactum: quod adversatur experientiæ. Præterquam quod non videam quî conceperit, agitationem partium corporum liquidorum iis levitatem conciliare, id est conatum ad recedendum à centro, cum ad id desideraretur motum illum fieri in orbem circa terræ centrum, aut validiorem esse superiora versus quam inferiora: quod numquam dixit, quippe qui è contrario affirmaverit partes liquorum moveri quoquo versùs indiscriminatim.

Neque magis attendisse videtur quàm velox debeat esse materia fluida, ut corpora tam gravia evadant quam pleraque reperiuntur; secus enim comperisset motum quem habent aut aquæ aut cæterorum liquorum particulæ

 nul-

nullo modo comparari posse cum motu materiæ illius quæ gravitatis causa est.

Ego vero diligenter indagavi gradum velocitatis illius, ita ut putem propemodum me assecutum esse quanta debeat esse. Cum autem plures inde effectus pendere possint, non supervacaneum erit ostendisse quid calculus meus produxerit & in quo nitatur. Esto igitur eadem figura quæ prius. Cum gravitas corporis E sit perfecte æqualis nisui quo portio æqualis materiæ fluidæ contendet recedere à centro D, aut potius cum sint unum & idem; oportet libram plumbi, verbi gratia, tantum gravitare terram versus, quantum massa materiæ fluidæ æque magna ac massa plumbi (intelligo magnitudinem partium solidarum) gravitat sursum versus ad recedendum à centro, vi motûs sui circularis. Materia enim tum plumbea tum fluida non differunt in hypothesi nostra. Ergo possumus affirmare, quod libra plumbi tantum gravitat deorsum, quantum gravitaret sursum, si ad eandem semper distantiam à centro, tam celeriter circumageretur quam materia fluida. Sed reperio, ex theoria mea de circulari motu, quæ plane cum experientia convenit, corpus in circulo revolutum, si quis velit conatum illius ad recedendum à centro æqualem esse conatui gravitatis simplicis; reperio, inquam, oportere ut corpus illud singulas revolutiones conficiat intra idem tempus, quo pendulum, æque longum ac semidiameter circuli illius, duas vibrationes conficit. Necesse igitur est videamus, quanto temporis spacio pendulum æque longum ac semidiameter terræ duas illas vibrationes conficere queat. Quæ res facilis est ope proprietatis notæ pendulorum, & longitudinis illius, quod singulis minutis secundis vibrationem peragit, estque 3 pedum $8\frac{1}{2}$ linearum, mensuræ Parisiensis. Reperio igitur requiri ad duas illas vibrationes horam unam cum $24\frac{1}{2}$ minutis, positâ, ex accurata dimensione Picarti, semidiametro terræ longâ 19 615 800 pedes ejusdem men-

TAB. IX. Fig. 1.

mensuræ. Ergo velocitas materiæ fluidæ, circa superficiem telluris, debet æqualis esse velocitati corporis quod circum terram volvetur intra idem spatium horæ unius cum 24½ min. Quæ celeritas, propemodum, est decies & septies major quam celeritas puncti alicujus sub Æquatore; quod eamdem viam conficit, respectu stellarum fixarum, ut debet hîc accipi, intra 23 horas cum 56 minutis: ut liquet ex proportione inter tempus illud, & spatium horæ unius cum 24½ minutis, quæ est fere ut 17 ad 1.

Non me latet, rapiditatem tantam videri posse incredibilem, si quis ipsam comparet cum motibus quos hic videmus. Id tamen difficultatem parere non debet, & sane respectu sphæræ aut magnitudinis terræ non valde mira illa videtur. Si enim v. g. ex globis, quos in usum Geographiæ construunt, terrestrem consideres, in eoque fingas tibi punctum quod unum tantum gradum intra 14 minuta secunda vel arteriarum pulsus emetiatur, quæ est memorata materiæ velocitas; motus hic valde mediocris tibi videbitur aut etiam lentus.

Cæterùm plures sunt effectus naturales, qui videntur postulare materiam violento motu agitatam, & per poros corporum facile penetrantem. Hujusmodi est vis pulveris pyrii, qui, accensus motum suum concitatum neque à se habet neque ab eo qui ignem admovet, consequenter necesse est accipiat ab aliqua materia quæ motu eo gaudet, & quæ, ubique præsens, semper agat, ubi omnia apte convenienterque disposita repperit. Ejusmodi quoque est, meo judicio, vis elateris, tum in chalybe aliisque corporibus solidis, tum in aere; quibus & addi potest vis in musculis animalium, quam commode explicabis, per fermentationem quamdam sanguinis ortam è succo nervorum. Sed unde veniet fermentationis istius vis, nisi ab aliquo motu externo? Nec melius concipies fortem illam gelu vim, nisi recurras ad impulsionem violentam materiæ alicujus, quæ aut extendat glaciem, intro-

troducendo nimirum in eam alias particulas, aut bullas quæ in ipsa formantur, augendo copiam aëris in his contenti. Hoc autem tantâ violentiâ fit, ut sclopeta, quibus aqua inclusa fuerat, diffindi viderim.

Ut autem ad gravitatem revertar, summa celeritas materiæ, quæ ejus causa est, docet nos cur corpora gravia cadendo motum suum accelerent, etiam cum jam acquisiverint rapidissimum. Etenim materia fluida cum multo celerior sit quam globus tormenti bellici, qui in aëre recidit, in quem perpendiculariter emissus fuerat; globus ille, ad finem lapsus sui, eodem fere modo ab illa materia premitur, adeoque celeritas illius inde magis magisque crescit. E contrario autem, si materia motum tantum haberet mediocrem, eo accepto, globus non acceleraret casum suum; quia aliter deberet eandem illam impellere materiam ita, ut in locum globi succederet majori celeritate quam ipsa habet.

Hinc denique hauriri potest ratio principii, quod assumsit Galilæus ad demonstrandam proportionem accelerationis corporum cadentium, scilicet velocitatem eorum æqualiter augeri temporibus æqualibus. Cum enim corpora successive pellantur à materia quæ nititur in eorum locum succedere & sicut dictum est modo, indesinenter eàdemque vi premantur; saltem in casibus, circa quos experimenta instituere possumus; sequitur necessario augmentum velocitatum proportionale esse augmento temporum.

Explicui itaque, ex hypothesi quæ nihil impossibile involvit, cur corpora terrestria ad centrum tendant; cur actio gravitatis nequeat impediri interpositu ullius corporis noti: cur partes interiores cujuslibet corporis ad gravitatem illius universæ conferant; ac demum cur corpora cadentia semper ac semper fiant velociora idque in proportione temporum. Nec plures hactenus observatæ erant gravitatis proprietates.

Su-

Supereſt adhuc alia, quæ haud minus certa exiſtimata fuit, nempe corpora æque gravia eſſe ubicumque terrarum, quod cum aliter obtinere nuper obſervatum ſit, operæ pretium eſt inquirere unde id oriatur, & quid inde ſequi debeat.

In Caiana, regione Americæ diſtanti tantum 4 aut 5 gradus ab Æquatore, dicitur inventum eſſe, quod Pendulum ſingulis minutis ſecundis vibrationem peragens, brevius ſit quam Lutetiis lineâ $1\frac{1}{4}$; unde ſequitur, ſumptis pendulis ejuſdem longitudinis, pendulum Caianæ paulo tardius moveri quam Lutetiis. Quod ſi pro vero habeatur ſemel, dubium eſſe nemini poteſt quin hoc manifeſte arguat lentius ibi deſcendere corpora gravia quam in Gallia. Cum autem diverſitas illa tribui non poſſit tenuitati aëris, quæ major eſt in zona torrida, quandoquidem effectus plane contrarius inde oriri deberet; reſtat, meo quidem judicio, ut dicatur idem corpus levius eſſe ſub Æquatore quam in climatibus inde remotis. Statim atque novum illud phænomenon accepimus, agnovi cauſam oriri poſſe à motu diurno terræ, qui cum major ſit in unaquâque regione, prout Æquatori eſt magis vicina, debet producere conatum proportionatum ad rejicienda corpora à centro, adeoque partem aliquam de gravitate detrahendam. Quota autem pars ſit in corporibus ſub Æquatore locatis, non difficile eſt æſtimare ex iis quæ explicuimus ſupra, cum enim invenerimus, ſi terra decies & ſepties citius quam nunc volveretur, vim centrifugam ſub Æquatore fore æqualem gravitati corporis; neceſſe eſt, ut motus diurnus terræ prout nunc eſt, detrahat de gravitate partem, quæ ſit ad gravitatem integram ut 1 ad quadratum 17, ſcilicet $\frac{1}{289}$: quia nimirum vires, quibus corpora à centro circa quod volvuntur, recedunt, ſunt inter ſe ut quadrata velocitatum eorundem, ex meo theoremate tertio *De Vi centrifuga.* Quandoquidem igitur ſingulum quodque corpus, ſubter Æquatorem, ſit levius $\frac{1}{289}$ quam eſſet, ſi terra circa

axem

axem suum non volveretur; sequitur, ex legibus mechanicis, longitudinem penduli debere ibi minorem fieri $\frac{1}{289}$, ut viam suam intra idem tempus conficiat, ac faceret terrâ immobili.

Sed ut detegamus, quotâ parte minui debeat Pendulum quod è Gallia sub lineam æquinoctialem fertur, considerandum est, jam illud brevius esse Lutetiis quam si terra immota esset; quia nimirum, motus diurnus sub illo parallelo facit etiam suum conatum, ut repellat corpora à centro terræ. Conatus tamen ille minor est quam sub æquatore, tum quia circulus motûs minor est, tum quia non pellit corpora rectâ sursum, sed tantum perpendiculariter ad Axem terræ, sicut hacce in figura videre est.
TAB. IX. Fig. 2. Circulus P A Q E repræsentat terram sectam à plano transeunte per utrumque Polum P, Q. Centrum est C. circulus Æquinoctialis E C A: parallelus Parisiensis D O N. Parisii in D: K H repræsentat funem sustinentem massam plumbi H, quod recedit à perpendiculari K D C, quia rejicitur, per motum circularem, secundum lineam O D M, quam pono transire per pondus H.

Nunc si lubeat scire qui debeat esse situs fili K H, & quanto minus plumbum H sic gravitet, quam si penderet perpendiculariter secundum K D. considerare oportet punctum H ac si trahatur à tribus filis H C, H M, H K; è quibus H C centrum terræ versus trahit toto pondere quod haberet plumbum, si terra immota staret: H M trahit juxta propriam directionem, cum ea vi quam dat motus terræ in circulo D N; & H K trahitur aut trahit cum ea vi quæ quæritur. Productâ igitur C H, & ductâ K L parallela D M, notum est tria latera trianguli H L K proportionalia esse potentiis quæ trahunt punctum H; & latus L H respondere ei quæ trahit per H C, latus K L ei quæ per H M, ac latus H K ei quæ trahit aut sustinet plumbum per filum K H. Sed triangulum K D H censetur habere latera sua æqualia lateribus trianguli H L K,

quia

quia C H L eſt quaſi parallela C D K. Ergo latera trianguli K D H reſpondent iiſdem potentiis, ſcilicet latus K D gravitati abſolutæ ponderis H, quam haberet, ſi terra ſtaret immobilis: D H potentiæ quam illi tribuit motus diurnus: & K H gravitati quæ quæritur. Sed triangulum illud K H D datur. Quandoquidem enim novimus conatum circularem, ſub Æquatore in E, eſſe $\frac{1}{289}$ ponderis abſoluti; & conatus ille eſt ad conatum in D aut in H, ut E C ad D O, quæ ſunt in ratione data; ſciemus igitur etiam, quæ pars ponderis abſoluti ſit conatus centrifugus in D aut in H: ſive ratio D K ad D H nota erit, quippe quæ conſtet ratione 289 ad 1. & ratione E C ad D O. Sed angulus quoque H D K eſt notus, utpote qui æqualis ſit angulo latitudinis Pariſiorum, nempe 48. graduum cum 51. minutis. Ergo nota etiam erit ratio D K ad K H, quæ ratio eſt gravitatis abſolutæ corporum ad gravitatem quam habent Pariſiis, ut & longitudinis penduli in terra immota ad longitudinem quam habere debet ſub hoc parallelo, ſecundum ea quæ ſuperius dicta ſunt. Cum vero longitudo penduli pulſantis ſecunda ſit data Pariſiis, nota erit etiam ea quam in terra immobili haberet, & quænam ſit utriuſque differentia, & quanto differentia illa minor ſit quam illa $\frac{1}{289}$ quam ſub Æquatore repereramus.

Ut igitur hoc facile ſupputemus & ſine triangulorum calculo, ſciendum eſt, id quod probabimus ſtatim, ſcilicet, ut quadratum radii E C eſt ad quadratum D O, ſinus complementi latitudinis Pariſiorum, ita eſt $\frac{1}{289}$ differentia aut imminutio penduli ſub Æquatore, ad differentiam aut imminutionem penduli Pariſiis. Quam inde colligo eſſe $\frac{1}{668}$ longitudinis penduli in terra immota, vel ſub Polo. Quandoquidem autem Pendulum ſecunda indicans Pariſiis eſt 3. pedum & $8\frac{1}{2}$ linearum, ſequitur longitudinem penduli in terra immobili vel ſub Polo eſſe 3 pedum & $9\frac{1}{6}$ linearum; unde, demendo partem $\frac{1}{289}$, quæ

valet $1\frac{1}{2}$ lineam, habebitur longitudo Penduli secunda indicantis, sub Æquatore, 3 nempe pedes cum $7\frac{2}{3}$ lineis. Pendulum itaque illud brevius erit quam Parisiis $\frac{5}{6}$ lineæ, quod paulo minus est quàm quod repererat Richerius in Caiana, lineam nempe unam cum quadranti.

Verum non possumus omnino confidere primis illis observationibus, quarum nulla describitur circumstantia, multoque adhuc minus, ut puto, iis quæ dicuntur factæ esse in Gadalupa, ubi Penduli Parisini imminutio reperta fuit 2 linearum. Spero fore diuturnitate temporis ut certiores fiamus exactè de variis illis longitudinibus, cum sub Æquatore tum in aliis climatibus; & certe res digna est quæ summâ diligentiâ indagetur, etiamsi nullum alium inde colligeremus fructum, nisi ut, ex theoria illa, corrigi possent motus horologiorum pendulorum & accommodari ad metiendas longitudines in Mari. Horologium enim v. g. quod semel Parisiis bene constitutum fuisset, si transferretur sub Æquatorem, retardaretur circiter minuto uno cum 5 secundis intra 24 horas, ut facile est supputare ex superiori ratiocinio, & sic proportionaliter, pro singulis diversis gradibus latitudinis. Ubi reperietur retardationes illas sequi inter se eamdem satis præcise proportionem quam diminutiones penduli; & maximam retardationem, qualis esset horologii sub Æquatore quod fuisset constitutum sub Polo, futuram singulo quoque die fere $2\frac{1}{2}$ minutis. Supputatis igitur hujusmodi tabulis corrigi posset harum ope motus horologiorum & iis uti possemus non minus certe quam si motus ille esset ubique æqualis.

Nunc ut demonstremus quod paulo ante posuimus, ubi indagavimus scilicet quæ sit diminutio Penduli Parisiis; (res autem ubicumque eadem est) cum nota est quantitas diminutionis sub Æquatore, sumatur in eadem figura K F æqualis K H, & sit H G parallela axi P Q. Demonstratum est H D esse ad D K, ut conatum centrifugum,

fugum, in D aut H, ad pondus absolutum in terra immobili. Sed ut E C aut C D ad D O, id est ut G D ad H D, ita est conatus centrifugus in E, sub Æquatore, ad conatum in D. Ergo ut G D ad D K, ita erit conatus centrifugus in E, ad pondus absolutum in terra immota. Et linea G D erit diminutio Penduli quæ requiritur sub Æquatore, ex supradictis. Sed F D est diminutio Parisiis facta, & G D est ad D F ut quadratum G D ad quadratum D H; quia propter exiguum angulum D K H, H F spectari potest tamquam perpendicularis ad G D. Ergo diminutio sub Æquatore facta ad eam quæ Parisiis fit, est ut quadratum G D ad quadratum D H; id est, ut quadratum C D aut E C ad quadratum D O; quod erat demonstrandum.

Superest ut, in eadem figura, consideremus angulum H K D, qui notat quanto plumbum K H quietum declinet à perpendiculari K D. Ac reperio angulum illum sub parallelo Parisino habere 5 minuta cum 54 secundis, & paulo majorem esse debere sub 45 gradu latitudinis.

Declinatio illa longe contraria est ei opinioni quæ semper pro vera habita fuerat, nempe funem, è quo pendet plumbum, rectà versus terræ centrum tendere. Angulus autem ille, cum sit decima pars gradûs unius, ejus magnitudinis erat, ut facile deberet animadverti tum per observationes Astronomicas, tum per eas, quæ instituuntur cum libellâ. Ut enim de posterioribus hisce tantum loquar, nonne deberet, septentrionem versus, linea libellæ sub horizonte inclinari? Quod tamen neque observatum est unquam, neque revera fit. Cujus rationem ut afferam, quæ ipsa pro paradoxo haberi potest, dico terram non esse plane sphæricam, sed figuram habere sphæræ versùs utrumque polum inclinatæ, qualem fere faceret Ellipsis circa minorem axem suum circumacta. Id oritur à motu diurno terræ, sequiturque necessario è declinatione plumbi, quam dixi. Quoniam,

cum descensus corporum gravium parallelus sit lineæ suspensionis illius, necesse est superficiem uniuscujusque liquoris ita se componere, ut lineam illam perpendicularem habeat, secus enim descendere posset amplius. Proinde superficies maris est ejusmodi ut filum suspensum ubique perpendiculare habeat supra se se. Unde sequitur lineam libellæ, eam nempe quæ filum plumbi suspensi secat ad angulos rectos, debere horizontem ostendere, prout facit; cum solâ altitudine loci, ubi sita est libella, fiat ut paulo altius visus dirigatur. Sed cum terræ latera sint vulgo elevata eodemque fere modo, respectu maris; sequitur, quod totum illud coalescens ex terris & maribus necessario reductum sit ad figuram illam sphæroideam, quam superficies maris necessario accipit. Credibile autem est terram in figuram ejusmodi abiisse, ubi partes ejus collectæ sunt vi gravitatis, quippe hæ etiam tum habebant motum suum circularem 24. horarum.

ADDITAMENTUM.

PAulo postquam superiora scripseram, examinato diario navigationis, ad Promontorium Bonæ spei, susceptæ jussu Directorum Societatis Indiarum Orientalium, cum horologiis nostris pendulis; ac perlecto eruditissimo Newtoni Opere inscripto, *Philosophiæ naturalis principia Mathematica*; in utroque plura reperi quæ extendendo huic tractatui materiem mihi suppeditabant. Ac primùm quod attinet ad varias longitudines pendulorum in variis climatibus, de quibus etiam egit; existimo me invenisse, horologiorum illorum ope, non modo confirmationem evidentem effectûs istius per motum terræ, sed etiam mensuræ longitudinis illorum, quæ plane convenit cum eo, quem mox proposui, calculo. Correctis enim ex calculo illo locorum longitudinibus, quas emensi fuerant horologiorum ope, redeundo è promontorio Bonæ spei ad

Texe-

Texelium uſque in Hollandia (iis enim in abitu uſi non fuerant) comperi viam navis multo melius in Tabula eſſe deſcriptam quam fuerat prius ſine hac correctione; adeo ut, cum in portum illum appuliſſent, vix erraſſent 5 aut ſex leucis in longitudine ita emendata. Poſito longitudinem Promontorii bene deſcriptam fuiſſe à P P. Jeſuitis, cum hoc præternavigarunt anno 1685 euntes ad Siam, eamque eſſe 18 gradibus magis ad orientem quam Pariſinam; quod etiam aliunde ſcio à vero non longe abſcedere. Res tota ſingulatim expoſita eſt in relatione de hoc itinere Pendulorum dictis Dominis Directoribus factâ; iiſdemque, relatione meâ viſâ, & examinandâ datâ pluribus viris doctis, placuit mandare, ut alterum fieret experimentum, quò ita per plura experimenta certi eſſemus de præſtantiâ inventi. Qui futurus ſit autem itineris illius exitus, & imprimis in eo quod pertinet ad variationem pendulorum, videbimus brevi; certumque eſt eam poſſe certius cognoſci horologiorum illorum ope, per accelerationem nempe & retardationem, quas in iis obſervare eſt, quam ſi metiaris longitudinem penduli quod ſecunda indicat, in diverſis regionibus. Interea, cum in tentamine, de quo dixi, experientia tam bene cùm ratiociniis meis convenerit, ſatis iis fido ad pergendum in hac ſpeculatione, quæſiturus primùm, quænam ſit forma terræ, quandoquidem, ut dixi, non eſt ſphærica.

Juvabit ad id eam ſpectaſſe tanquam aquâ penitus inundatam, aut potius, ac ſi tota ejus maſſa in aquam reſoluta foret; apparet, ex dictis, ſuperficiem illius debere eſſe ejuſmodi, ut ubivis filum è quo plumbum pendet, illi occurrat ad angulos rectos, habitâ ratione gravitatis ſimul conatus centrifugi, qui filum avertit à directione ſua verſus centrum. Si enim filum non occurreret ſuperficiei ad angulos rectos, non poſſet hæc manere in eodem ſitu.

Poſitis igitur iiſdem ac in ultima figura Tractatus ſuperioris, ut & quæ ibidem explicita ſunt, ſed forma terræ

TAB. IX. Fig. 3. paululum minutâ & verſus Polos complanatâ, ita ut axis P Q brevior ſit diametro E A; ducatur B D S R parallela K H, ſecans E A, P Q in S & in R. Cum filum K H ſuſtinens plumbum, aut potius illi parallela B D, occurrere debeat ſuperficiei maris ad angulos rectos; filumque illud ita pendeat ut K D ſit ad D H, aut D C ad C S, velut gravitas abſoluta ad vim centrifugam in D: quæ ratio componitur ex ratione gravitatis abſoluta ad vim centrifugam in E, quæ eſt ut 289 ad 1. & ratione vis illius ad vim centrifugam in D, quæ eſt ut E C ad D O; apparet naturam lineæ curvæ E D P determinatam eſſe per proprietatem perpendicularis ſuæ, ut D R; id eſt, ductâ unâ ejuſmodi perpendiculari, rationem D C ad C S debere ſemper componi ex ratione datâ & ex ratione E C ad D O. Sive, ut inde colligi facile poteſt, ratio D O ad C S vel O R ad R C debet ſemper conſtare ex ratione data, quam diximus, & ex ratione E C ad

Difficile quidem eſt reperire hunc in modum lineas curvas per proprietatem datam perpendicularium illarum, ſive, quod idem eſt, per proprietatem tangentium. Verum datur methodus ſatis facilis ad hanc curvam inveniendam, quæ nititur æquilibrio quorundam canalium, cujus Newtonus primus ideam dedit.

Canalis, quem fingit, repræſentatur in figura noſtra per E C P facientem angulum rectum cum centro terræ. Debet concipi paululum excavatus eſſe, & aquâ plenus: hiſce ſic poſitis, conſtat duo crura E C, C P debere in æquilibrio perſtare, ſi ponamus terram, totam ex aqua conſtantem, figuram induere cujus diametri ſint E A & P Q; quia ſecus aqua illa canalis non perſeveraret in ſitu ſuo, ſi conciperetur ſine canali, quod eſt contra hypotheſim: unde facile eſt reperire rationem E A ad P Q. Si enim ponas E C ∞ a; C P ∞ b, & repræſentes gravitatem abſolutam per lineam p, vimque centrifugam in E per lineam n; Pondus Canalis P C eſt $p\,b$, id eſt productum

ctum omnium partium Canalis illius & lineæ p. Sed pondus canalis E C, quod foret $p\ a$, imminutum eſt per vim centrifugam omnium ſuarum partium, è quibus ſublimior, quæ eſt in E, habet vim n, cœteræque aliæ proportionatam iſti, pro diſtantiis ſuis à centro D: quod facit $\frac{1}{2}n\ a$ pro tota vi centrifuga aquæ canalis E C, quâ demtâ de pondere illius pa, ſupereſt $p\ a - \frac{1}{2}n\ a$, quod æquale debet eſſe $p\ b$ ponderi canalis P C. Unde patet, quod a eſt ad b, ut p ad $p - \frac{1}{2}n$. Scilicet quod diameter E A terræ eſt ad axem illius P Q, velut 289 ad $288\frac{1}{2}$, vel ut 578 ad 577: ratio enim p ad n erat ut 289 ad 1.

Ut reperiam deinde quænam ſit linea curva E D P, fingo mihi canalem plenum aquâ E C D, &, ductâ D O perpendiculari ad axem P C, facio C O ∞ x, & O D ∞ y, coeteræ vero lineæ idem nomen habent quod antea. Conſtat aquam E C & aquam D C debere ietrum æque ponderare. Quinimmo hoc contingere neceſſe eſt quocumque modo fingatur Canalis, modo utrimque ad ſuperficiem pertingat, ut, verbi gratiâ, ſi iret per D O C E aut D O P, aut D C P. Porro vis centrifuga totius aquæ in C D æqualis eſt vi aquæ quæ eſſet in canali O D poſito ejuſdem magnitudinis: quod facile intelligitur ex mechanica planorum inclinatorum. Sed ut E C ∞ a ad D O ∞ y, ita eſt vis centrifuga in E quæ erat n, ad vim centrifugam in D; quæ igitur erit $\frac{ny}{a}$. Cujus dimidium, multiplicans id quod continetur canali D O ∞ y, conſtituit vim centrifugam canalis illius ∞ $\frac{1}{2}\frac{nyy}{a}$, quæ igitur eſt etiam vis centrifuga canalis C D. Sed gravitas iſtius canalis C D, verſus centrum C, eſt $p\sqrt{xx+yy}$. Ergo preſſio illius, quæ ſupereſt verſus C, erit $p\sqrt{xx+yy} - \frac{1}{2}\frac{nny}{a}$; quæ debet eſſe æqualis $pa - \frac{1}{2}an$, preſſioni canalis E C jam repertæ.

Quæ æquatio poſito $\frac{ap}{n} = f$ huc redit

$y^4 \infty$

$$y^4 \propto 4ffyy - 4aaff + 4ffxx$$
$$- 4afyy + 4a^3f$$
$$+ 2aayy - a^4$$

Unde patet lineam curvam E D P non esse sectionem Coni, nisi quando p & n æquales sunt, id est, quando vis centrifuga corporis, positi in E, ponitur æqualis esse gravitati suæ versus centrum C. Tunc enim apparet f æqualem esse a; & æquatio fit $y^4 \propto 2aayy - a^4 + 4ffxx$; vel $y^4 - 2aayy + a^4 \propto 4ffxx$; vel tandem $yy - aa \propto 2ax$. Quod
TAB. IX. Fig. 4. argumento est E D P fieri tunc Parabolam, qualem hacce in figura videre est, scilicet quæ habeat verticem P, axem P C æqualem $\frac{1}{2}$ C E, & parametrum duplam ejusdem C E.

Ac proinde si terra, habens diametrum E A eâ magnitudine quâ est, volveretur circa axem suum B Q decies & septies velocius quam facit, (tunc enim vis centrifuga in E æqualis esset gravitati versùs centrum ex demonstratione quæ in dissertatione hacce videre est) haberet figuram corporis quod simul faciunt duæ illæ semi-parabolæ oppositæ, P E C, Q E C, dum volvuntur circa axem P Q. Videturque nullam majorem vim centrifugam posse supponi, quoniam nimirum, si major esset quam gravitas, corpora collocata in E in aëra evolarent.

Præter hunc casum, si in Æquatione reperta fiat $yy \propto az$, sitque z linea indeterminata, habebitur $z \propto a - 2f + \frac{2ff}{a} - \sqrt{4ff - 8f^3 + \frac{4f^4}{aa} + \frac{4ffxx}{aa}}$ Si vero posueris d pro $\frac{ff}{a} - f$, exsurget $z \propto a + 2d - \sqrt{4dd + \frac{4ffxx}{aa}}$. Unde novi, si
TAB. IX. Fig. 3. C O sit x, & perpendicularis O T nuncupetur z, punctum T futurum in hyperbola cujus axis additus C E erit $4d$; & ut $4ff$ ad aa, ita fore axem ad parametrum; quæ erit $\frac{aad}{ff}$, id est, $\frac{a-na}{p}$, restitutis valoribus d & f. Quoniam autem yy erat æqualis az, sequitur D O $\propto y$ fore mediam proportionalem inter O T & E C. Unde reperiri possunt puncta per quæ linea curva E D P transire debet.

Linea autem iſta ſatis facit etiam requiſito ante memorato, ſcilicet, ductâ DR ipſi lineæ ad angulos rectos inſiſtente, ratio OR ad RC conſtabit ex ratione p ad n & EC ad CD, ut facile probatur ex calculo Algebraico.

Poſui hac in demonſtratione gravitatem eamdem eſſe intra terram ac in ſuperficie, quod veriſimillimum mihi videtur, etſi non neſciam aliquem eſſe locum dubitandi, de quo poſtea. Verum etiamſi ſecus obtineret, fere nihil immutaretur illud, quod inventum eſt de figurâ terræ; niſi in caſu in quo vis centrifuga magna eſſet pars gravitatis aut etiam illi æqualis foret, veluti in hypotheſi figuræ parabolicæ, quæ tum plane alia evaderet. Cæterum, ubi vis centrifuga in E exiguam habet rationem ad gravitatem, ut hîc in terra, tunc hyperbola ETP, ob magnam centri diſtantiam, ad parabolen valde accedit; adeoque EDP neque multum differt ab Ellipſi neque à circulo, quia tunc EC ſuperat CP paululum admodum. Reperimus enim paulo ante exceſſum illum eſſe dumtaxat $\frac{1}{578}$ EC, ſemidiametri terræ.

Newtonus exceſſum hunc invenit, $\frac{1}{231}$ EC, ac proinde figuram terræ multo magis diſtare à ſphærica. Quo in calculo utitur quâdam ſupputandi ratione, quam hic non examinabo, ſiquidem haud aſſentior illi axiomati quod ibi aliasque ſumit; ſcilicet particulas omnes, quæ concipi poſſunt in duobus pluribusve corporibus, ſeſe invicem attrahere, ſive conari ad ſe invicem accedere. Quod concedere prorſus nequeo, quia videor mihi manifeſte percipere cauſam attractionis ejusmodi neque explicari poſſe per principia Mechanices neque per regulas motûs. Neque perſuaſum magis habeo neceſſariam eſſe attractionem hanc corporum integrorum; quandoquidem oſtendi, etſi nulla eſſet terra, fore tamen ut corpora, ſua quam dicunt gravitate, centrum aliquod peterent. Itaque nihil habeo contra *vim centripetam*, ut vocat

Newtonus, per quam vult planetas gravitare versus solem, lunamque terram versus. Quin immo eam eo magis sine difficultate admitto, quod ejusmodi attractionem sive impulsionem esse in natura experientia docet, quam etiam explicare possumus per leges motus, ut ex eo videre est, quod supra de gravitate scripsi. Enimvero nil obstat quominus causa vis illius centripetæ versus solem, similis sit vi quæ cogit corpora gravia terram versus descendere. Existimaveram quidem olim figuram solis sphæricam eadem ex causa proficisci, quæ, juxta meam sententiam, ut terra sphærica esset efficeret. At nondum extenderam gravitatis vim ad tantas distantias à Sole ad Planetas & à terra ad Lunam; quia nimirum vortices Cartesii, quos duxeram olim valde verisimiles, quique menti adhuc inhærebant, me impeditum dabant. Neque etiam magis attenderam ad diminutionem illam regularem gravitatis, nempe quod sit in ratione reciproca quadratorum distantiarum à centro: quæ nova insignisque proprietas gravitatis est, cujus non supervacaneum fuerit investigasse rationem. Nunc vero cum videam, ex demonstrationibus Newtoni, gravitatem ejusmodi versus solem, quæ minuatur eà proportione, ita æquare vires centrifugas planetarum, & producere præcise effectum motus Elliptici quem Keplerus conjectaverat observationibusque confirmaverat; vix est ut dubitem quin hypotheses illæ veræ sint, ut & systema Newtoni, in quantum iis innititur. Imo systema illud eò probabilius videri debet, quoniam solvit plures difficultates quæ in vorticibus Cartesianis negocium facessebant. Intelligitur nunc quî excentricitates planetarum possint esse semper eædem; cur plana orbitarum non coincidant sed retineant constanter easdem inclinationes ad planum Eclipticæ; & cur plana omnium illarum orbitarum necessario per solem transeant. Quomodo motus planetarum possint celeriores lentioresve fieri per eos gradus quos observamus: quæ res difficulter sic obtinere posset, si Planetæ innatarent vortici alicui cir-

ca ſolem. Tandem docet ſyſtema illud quo pacto fieri poſſit, ut Cometæ per ſyſtema noſtrum tranſeant. Enimvero ex quo novimus eos ſæpe ingredi in regionem planetarum, difficulter intelligebamus quî poſſent ferri motu contrario motui ejus vorticis qui ipſos planetas abripiebat. Verum doctrina Newtoni ſcrupulum hunc abſtulit, quia nil obſtat quominus Cometæ percurrant vias ellipticas circum ſolem, veluti planetæ, easque longiores & figuræ magis diſſimilis circulari; ac proinde ſtatutis temporibus redeant, ut plures Philoſophi & Aſtronomi veteres ac recentes conjecerant.

Hoc unum modo ſcrupulum injicit, quod Newtonus, expulſis vorticibus, vult ſpacia cœleſtia plena dumtaxat eſſe materiâ quâdam rariſſimâ, ut ſcilicet Planetarum Cometarumque curſus tanto minus impediatur. Quæ ſi ita ſint, videtur funditus corruere mea de gravitate & de lumine explicatio. Ut igitur caput hoc ad examen vocem, dico materiam ætheream poſſe raram eſſe duobus modis, aut ſi particulas habeat inter ſe diſtantes interſtitiaque vacua; aut ſi particulæ illæ ſeſe quidem contingant, ſed ſingularum contextus ſit rariſſimus pluribusque ſpaciis vacuis intermixtus. Vacuum equidem facile admitto, videnturque corpuſcula parva absque eo non poſſe inter ſe moveri; quâ in re longe aliter ſentio ac Carteſius, qui eſſentiam corporis in extenſione ſola poſuerit, cum addendam eſſe putem duritiem perfectam quâ corpus impenetrabile fiat, ejusque naturæ ut frangi aut minui non poſſit. Attamen ſi raritatem priori modo ſpectem, nullus video quî poſſit gravitatis ratio reddi, imo prorſus mihi impoſſibile videtur explicare velocitatem ſummam luminis, quæ, ex demonſtratione Romeri, quam videre eſt in noſtra diſputatione de Lumine, ſexcenties millies major eſt quam celeritas ſoni. Quamobrem raritatem ejuſmodi puto minime convenire cœleſtibus ſpaciis.

Veriſimilius igitur eſt raritatem altero modo ſumendam

 eſſe,

esse, quia ita spectatæ particulæ sese contingere queunt, velut posui in mea dissertatione, & tamen, præ raritate contextûs sui, parum resistere Planetarum motui. Etenim quis novit quam dura corpora natura possit efficere ex pauca materia, imprimis, annon particulæ tenuissimæ, & etiam cavæ, possint esse infinitarum virium. Verùm, etiamsi ad raritatem non attendamus, credo summam agitationem materiæ æthereæ multum facere posse ut penetrabilis fiat. Enimvero, si ex levi particularum suarum motu aqua evadit liquida, multoque minus resistit rebus innatantibus, quam aut arena aut pulvis tenuissimus; nonne oportet materia subtilior & infinitè vehementiori motu abrepta, penetretur tanto facilius?

Utut hæc sunt, Natura, pro eâ quâ est industria, potest efficere ut sint spatia in quibus corpora cum minimâ resistentiâ moveantur: sicut patet ex eo quod manus nostræ sentiunt in aëre; magisque ex diversis experimentis quæ fiunt in vasis vitreis unde aër exhaustus est, in quibus pluma vel levissima eadem velocitate descendit quâ globus plumbeus. Quod si quis dicat id oriri ex summa raritate materiæ quæ ibi in vacuo superest, ei respondebo, quod è contrario inibi observare sit effectum materiæ gravissimæ, ut in experimento supra adducto abunde visum est.

Quod autem Newtonus dicit propos. 6. libri 3. dum vult probare æthera esse rarissimum: scilicet quod gravitates corporum sint, ut quantitates materiæ, quam continent; ac proinde, si spatia aëris aut ætheris æque referta essent materiâ ac aurum & argentum, metalla illa in iis non descensura esse; quia nimirum corpus solidum, si non habeat plus gravitatis specificæ quam fluidum, in fluidum non potest immergi. Fateor corporum gravitates sequi quantitates materiæ ex qua constant, ac idipsum hoc in tractatu ipse demonstravi. At ostendi etiam corporibus illis, quæ vocamus gravia, gravitatem imprimi posse à vi cen-

centrifuga materiæ cujusdam quæ ipsa non gravitat terram versùs, propter concitatissimum motum suum in orbem, sed quæ conatur recedere. Materia igitur illa bene implere potest totum spacium quod terram circumdat, & in quo nulla alia sunt corpuscula; neque hæc impedit quominus corpora gravia descendant, cum è contrario illa sola causa sit, cur tendant deorsum. Res aliter obtineret, si poneremus gravitatem esse qualitatem inhærentem materiæ corporeæ. Sed hoc Newtonum velle non credo, quoniam hypothesis ejusmodi nos longe à principiis Mathematicis mechanicisve avocaret.

Fortasse inquiet, etiamsi concedatur materiam constare ex particulis quæ sese contingant, ut transmittant lumen, hoc tamen non videri debere sequi hanc regulam, scilicet quod se extendat per lineam rectam; hoc enim pugnat cum prop. 42. lib. 2. ubi ait motum, qui propagatur per materiam fluidam, non modo extendere se rectâ ab origine sua, ubi per aperturam quandam transiit, sed etiam ad latus declinare. Ad quæ primo respondeo, quod illa, quæ attuli, ut probarem, lumen (præterquam in reflexione vel in refractione) tantum directe extendi, non minus subsistant, etiamsi hæc propositio vera sit. Non enim nego, cum Sol per fenestram lucet, diffundi motum aliquem ad latus spatii illuminati, sed dico tantum undas illas, cum à via deflexerint, nimis debiles esse, quam ut possint lumen producere. Quamvis autem ille velit emanationem soni argumento esse, emotiones illas ad latus esse sensibiles; pro certo teneo contrarium inde manifesto colligi. Enimvero si sonus, cum transit foramen aliquod, ad latus etiam deflecteret, ut vult Newtonus, non tam accuratè observaret in Echo æqualitatem angulorum incidentiæ ac reflexionis, ita ut, quando sumus in loco, unde nulla potest perpendicularis cadere in planum reflectens muri paululum distantis, non audiamus Echo respondere clamori-

 bus

bus quos ibi edimus, ut sæpe expertus sum. Neque dubium mihi est quin experimentum, quod addit, de sono qui domo licet interpositâ exaudiretur tamen, aliter obtineret, si domus illa in medio aquæ collocata esset ita, ut nil haberet circa se quod particulam aliquam soni posset reflectere.

Quod vero affirmat, in quavis parte cubiculi cujus fenestra pateat, sonum ab extra ortum audiri, non quidem a muro reflexum, sed venientem rectâ à fenestra; patet quam pronum ibi sit errare, propter multitudinem reflexionum repetitarum, quæ quasi instanti fiunt: adeo ut sonus, quem putes immediate venire à fenestra, vel à locis vicinis fortasse veniat, post duplicem reflexionem. Quod igitur pertinet ad undulationes, quas in superficie aquæ videre est, fateor id contingere fere ut Newtonus dicit, id est undam, ubi pervasit foramen, utrimque dilatari, plerumque debilius tamen versus latera quam in medio. Verum dico, quod emanationes soni à recta viâ devergentes pœne insensibiles auribus sunt, emanationes vero luminis, quæ à rectâ viâ quoque aberrant, insensibiles oculis prorsus.

Existimavi mihi occurrendum fuisse difficultatibus, quas liber Newtoni subjicere posset, quia nimirum probe novi quanti hoc opus æstimatur, ac merito quidem, utpote quo nihil in his rebus inveniatur doctius, nihil quod majorem mentis penetrationem demonstret. Superest nunc ut duo capita adhuc observem in ejus systemate, quæ pulcherrima mihi videntur, occasionemque præbebunt animadvertendi quædam alia; ac demum dicam ea quæ in Adversariis meis reperi de motu corporum per aëra aliudve medium quod resistat: quo de motu agit non obiter Newtonus lib. 2.

Vidimus, quomodo in systemate Newtoni gravitates, tum planetarum solem versùs, tum satellitum suos versus planetas, positæ sint in ratione dupla reciproca distantiarum

rum à centro ſuarum orbitarum. Idem mirifice confirmant ea, quæ Philoſophus ille demonſtravit de Luna, nempe vim centrifugam, quam à motu ſuo habet, æqualem eſſe præciſe gravitati ejus terram verſùs; ac proinde duabus illis viribus contrariis Lunam ibi ſuſpenſam hærere ubi eſt. Etenim cum diſtemus ab ea 60 Semidiametris terræ, adeoque gravitas ejus in ſua regione ſit $\frac{1}{3600}$ illius quam nos ſentimus; neceſſe erat, ut vis centrifuga corporis, quod moveretur ſicut Luna, æqualis item eſſet $\frac{1}{3600}$ ponderis quod in ſuperficie terræ haberet. Hoc autem ita prorſus reperitur, facileque computari poteſt, quandoquidem jam novimus vim centrifugam ſub Æquatore eſſe $\frac{1}{289}$ noſtræ gravitatis hîc loci.

Sed exemplum iſtud Lunæ cum tam manifeſte probet pondus minui, ex ratione reciproca quadratorum diſtantiarum à centro terræ; dubitare poſſit quis an non ſit quædam alia inæqualitas in Pendulis, præter eam quæ à motu diurno naſcitur. Si enim Terra non ſphærica ſit ſed propemodum ſphærois, punctumque aliquod ſub Æquatore magis diſtet à centro quam idem ſub Polo, in ratione 578 ad 577, ut jam dictum eſt; cum gravitates ibi ſint in ratione contraria quadratorum diſtantiarum illarum, oporteret etiam pendulum ſub æquatore brevius foret quam pendulum ſub Polo, in eadem ratione contraria. Id eſt, Pendula illa eſſent ut 288 ad 289, ſive pendulum ſub æquatore brevius eſſet $\frac{1}{289}$ quam ſub polo: quod diſcrimen prorſus idem eſt cum eo, quod è motu diurno aut vi centrifuga oritur. Ita ut horologium pendulo æque longo inſtructum lentius moveretur ſub æquatore quam ſub polo, duplo ejus, quo retardatur per motum Terræ; adeoque differentia illa diurna ſub Æquatore fere eſſet 5 min. ſub cœteris vero Parallelis reperiretur ſemper pluſquam duplo major quàm ibi erat antea. Sed dubium valde mihi eſt an experientia magnam illam variationem confirmet, cum in deſcriptione itineris de qua

men-

mentionem feci, observaverim primam æquationem sufficere, futurumque ut æquatio illa plusquam duplo major nimium discriminis poneret, versus medium itineris inter viam navis calculatam ope penduli, eamdemque ex æstimatione Navarchi computatam. Atque ut rationem adducam cur altera variatio locum non haberet, dico non mirum fore, si gravitas, prope superficiem terræ, non sequeretur præcise, ut in regionibus sublimioribus, diminutionem quam producunt variæ distantiæ à centro. Etenim potest fieri ut motus materiæ, quæ gravitatem gignit, paululum immutetur in viciniis terræ, veluti videtur intrinsecus fieri; cum aliter necesse esset ut gravitas, ubi accedit ad centrum, in infinitum cresceret: quæ res minime verisimilis est. Quinimmo Newtonus vult gravitatem intra terram minorem fieri, prout corpora ad centrum appropinquant. At id probat principio eodem, de quo jam dixi mihi cum illo non convenire.

Hoc unum superest quod vehementer mihi placuit illo in systemate; Nempe invenit methodum quâ, posito distantiam à terrâ ad solem notam esse, definiri possit quænam sit gravitas quam sentirent incolæ Saturni & Jovis, comparata cum nostrâ & quænam ejus mensura sit ad superficiem solis. Eæ res etsi longè à cogitatione nostrâ remotæ videantur, tamen sequuntur ex principiis quæ paulo prius recensui.

Determinatio illa locum habet in Planetis qui unum aut plures satellites habent, quia horum tempora periodica, & distantiæ à Planetis quos comitantur, debent contineri in calculo; ex quo Newtonus repperit gravitates in superficiebus Solis, Jovis, Saturni & Terræ, esse in ratione horum numerorum 10000, $804\frac{1}{2}$, 536, $805\frac{1}{2}$. Non diffiteor aliquid incerti inesse, propter distantiam solis non satis notam, quæ hocce in calculo sumpta est quasi 5000 diametrorum terræ, cum, ex dimensione Cassini sit circiter 10000; quod accedit ad id, quod alias repereram, ex

ex rationibus verisimilibus, in Systemate meo Saturni, scilicet 12000. Discrepo etiam paululum in eo, quod pertinet ad Planetarum diametros. Ex mea computandi ratione, gravitas in Jove, ad eam quam hic in terra habemus, est ut 13 ad 10, cum Newtonus utramque faciat æqualem, aut saltem ejusmodi, ut discrimen vix sentiri queat. Sed gravitas in sole quæ ex numeris superioribus, erat duodecies circiter major quam nostra, à me invenitur vicies & sexies major. Ergo, explicatâ gravitate ita ut ego feci, materia fluida debet prope solem quadragesies & novies velocior esse, quam ea quæ terræ vicina est, & quæ jam tum decies & septies superabat celeritatem alicujus sub Æquatore puncti. Summâ hâc rápiditate adductus sum ad cogitandum an illa non sit causa cur Solis lumen ita fulgeat, posito quod lumen gignatur eo quo exposui modo, nempe quod particulæ Solis, innatantes materiæ subtiliori & valde agitatæ, impingant in particulas ætheris circumfluas. Si enim agitatio materiæ ejusmodi, in illo motu quem hic in terrâ habet, potest efficere ut fulgeat flamma candelæ, quanto magis lumen illud futurum est splendidum, à motu quadragesies & novies rapidiori concitatiorique.

Summa cum voluptate vidi quæ Newtonus scripsit de casu & jactu corporum gravium in aëre sive alio quovis medio quod motui resistat, quia eidem studio operam olim dederam. Quoniam autem hæc materia partim gravitatem spectat, puto me hic posse adferre, quæ tum detexi. Sed summatim hæc exponam, neque adjungam demonstrationes, ut pote quas reliquerim imperfectas, cum speculatio illa non mihi videretur tanti usus aut consequentiarum, quæ responderent difficultatibus, quæ ibidem occurrunt.

Primo examinavi motus illos, ponendo vires resistentiæ esse ut velocitates corporum; quod tunc verisimillimum videbatur mihi. Verum vix fueram assecutus quod persequebar, cum cognovi, ex plurimis experimentis quæ

fecimus Parisiis in *Academia Scientiarum*, resistentiam aëris & aquæ esse ut quadrata velocitatum. Id autem facile concipi potest, quia corpus, quod movetur, verbi gratiâ, duplâ celeritate, incurrit in duplum particularum aëris aut aquæ, idque celeritate duplâ. Vidi ita novam meam Theoriam hunc in modum corruere, aut saltem inutilem esse, volui dein quærere quid contingeret, quando ponitur verum hoc fundamentum resistentiarum; ubi comperi rem esse multo difficiliorem, ac præsertim in eo quod spectat lineam curvam quam corpora oblique jacta percurrunt.

In primâ suppositione, quod resistentiæ sint ut velocitates, notavi, ad reperienda spatia certo tempore percursa, ubi corpora cadunt aut ascendunt perpendiculariter, & ad determinandas celeritates in fine temporis, lineam quandam curvam, quam jam ante examinaveram, summæ utilitatis in hoc negotio esse. Nuncupari potest *Logarithmica* aut *Logistica*, nondum enim quantum video accepit nomen, licet eam plures jam observaverint. Linea illa infinita est A B C, & habet pro asymptoto lineam rectam D E; in qua, si sumantur partes æquales quæ se mutuo sequantur, ut D G & G F, ducanturque, à punctis D, G, F, perpendiculares usque ad curvam, scilicet D A, G H, F B, lineæ illæ erunt continue proportionales. Unde patet facile reperiri posse quotvis puncta in curva illa, cujus postea proprietates aliquas describam quæ sunt notatu dignæ. Ut nunc explicem ea quæ pertinent ad casus corporum, repeto hic primum ea quæ dixi in fine tractatûs mei de centro agitationis; scilicet corpus, cadendo per aëra, celerius celeriusque semper moveri, ita tamen ut nunquam excedere possit aut attingere certum quemdam gradum, nempe illum quo aër ab inferiori sursum sufflans opus haberet, ut corpus teneret suspensum & immobile: tunc enim vis aëris in corpus illud æqualis est gra-

Tab. IX. fig. 5.

gravitati ejusdem. Celeritatem illam in unoquoque corpore voco celeritatem *terminalem*.

Si igitur corpus grave perpendiculariter projiciatur sursum ea cum celeritate, cujus ratio ad celeritatem terminalem sit data, exempli causâ, partis A K ad K D in ordinata A D, quæ est perpendicularis asymptoto D E; ducatur K B parallela asymptoto illi, & in puncto B curva tangatur à recta B O, quæ occurrat D E in O, & D A in Q. Tangens autem illa reperitur, sumptâ F O, ab ordinata B F æqualis certæ cuidam longitudini, quæ pro omnibus tangentibus eadem est, & quam definiam postea. Deinde sit A C parallela tangenti illi, secetque K B productam in P; & è puncto C, ubi occurrit curvæ, ducatur pariter C L M parallela A D, secansque K B productam, & A M parallelam asymptoto, in punctis L & M. Nunc tempus, intra quod corpus ascendit ad altitudinem quo pervenire valet, est ad tempus intra quod ab eadem altitudine descendit, ut linea K B ad B L.

Tempus vero intra quod, jactum ut diximus, ascendit per aëra, est ad tempus intra quod ascenderet, si nulla esset resistentia, ut K B ad K P.

Altitudo autem quò in aëre ascendet, ad eam quò ascenderet absque resistentia, ut spatium A B K ad triangulum A P K, vel ut Q A ad A X, quam sumo esse dimidiam partem tertiæ proportionalis lineis D K, K A.

Et Velocitas ejus initio ascensus ad eam quam habet in descensu, ut M L ad L C.

Præterea reperitur ex eadem linea quamnam curvam percurrat corpus oblique missum. Etenim, in eadem figura, si angulus jactûs, in linea horizontali, sit L M R cum velocitate data, cujus motus sursum sit ad celeritatem terminalem ut A K ad K D; repetatur superior constructio, & Recta A S, quæ tangit curvam A B C in A, occurrat K B in S. Deinde ut S P ad P B, ita sit R L ad L T, & in basi M C erigatur figura proportionalis seg- TAB. IX. fig. 6.

segmento ABCP; adeo ut lineæ parallelæ & æquidistantes ab asymptoto DE, in utraque figura, habeant omnino eamdem rationem BP ad TL. Curva MTC notabit figuram quæsitam jactûs.

Quoniam vero altitudo jactûs cum resistentiâ erat ad altitudinem jactûs liberi, ut QA ad AX; si fiat ut TL habeat eamdem illam rationem ad aliam lineam VZ; illa erit altitudo paraboles MU quam describit jactus ille liber, qui incepit in M eâdem vi & eadem directione MR, quâ alter jactus. Itaque si, in angulo LMR, formetur YZ perpendicularis ad MC & æqualis duplici VZ, habebitur vertex paraboles illius in V in medio YZ, & illius dimidia basis sive dimidia amplitudo MZ.

Notandum est, quicunque sit angulus elevationis LMR, posito quod velocitas verticalis eadem maneat, hìc inveniri eamdem amplitudinem MC. Verum hoc moneri debet, tantummodò jactuum figuras sic reperiri, non vero altitudines amplitudinesque diversorum jactuum simul comparatorum. Etenim debent esse omnes ejusdem altitudinis, quando celeritas verticalis eadem est. Itaque singula quæque figura jactûs, sic reperta, debet redigi ad figuram proportionalem æqualis altitudinis, ut sciamus quomodo amplitudines altitudinesque diversorum jactuum sint inter se.

Verum addo etiam hic, quod linea Logarithmica non modo utilis sit reperiendis curvis jactuum, sed quod sit curva ipsa in uno casu, ubi scilicet corpus jacitur oblique deorsum, ita ut descensus perpendicularis æquet celeritatem terminalem. Tunc enim corpus illud sequetur præcise curvaturam lineæ ejusmodi, accedendo semper ad asymptotam, quam attinget nunquam. Quod autem determinat speciem lineæ, est quod ejus *subtangens* (sic nuncupabo lineam FO quæ pro tangentibus omnibus eadem est) dupla erit altitudinis ad quam celeritate terminali corpus ascendet, absque medio resistente.

Hæc

Hæc repereram in hypothesi resistentiam esse ut celeritatem; sed cum theoria mea eo niteretur principio, quam natura non sequitur in resistentia aëris & aquæ, eam prorsus neglexi, neque resumpsissem unquam nisi tractatus Newtoni movisset me ut viderem an ea quæ viis diversis quæsieramus, inter se convenirent. Quod sic se habebat, constructio enim quâ utitur prop. 4. lib. 2., ad lineam jactûs, licet diversa longe à mea difficiliorque multo, eamdem tamen curvam producit, ut potest probari demonstratione Mathematica.

In illis examinandis, quæ contingunt in vera hypothesi resistentiæ, quæ est in ratione dupla celeritatis, determinaveram tantum casum particularem corporis jacti sursum cum sua celeritate terminali; scilicet tempus, integræ ejus elevationis in aëre, esse ad tempus intra quod adscenderet quousque potest liberè, ut circulus est ad quadratum ei circumscriptum, & altitudinem prioris jactûs esse ad altitudinem alterius, ut spatium, inter hyperbolen ejusque asymptoton, terminatum duobus lineis parallelis alteri asymptoto, quæ sint in ratione 2 ad 1, ad rectangulum aut parallelogrammum ejusdem hyperboles. Id est, ut spatium AMDK ad quadratum AC. Tab. IX. fig. 7.
Nondum vero indagaveram cæteros casus, qui continentur universaliter in pulcherrimâ prop. 9. lib. 2. Newtoni, idque, quia non reperiebam ex mea methodo mensuram descensus corporum, nisi supponerem quadraturam certæ cujusdam lineæ curvæ, quam nesciebam pendere à quadratura hyperboles. Redegi etiam dimensionem spacii curvæ illius ad progressionem infinitam, $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{7}a^7$ &c. Ignorans eandem progressionem dare etiam mensuram sectoris hyperbolici, quod intellexi postea, comparatâ demonstratione Newtoni cum iis quæ ipse repereram.

Quoniam autem progressio illa, pro mensura hyperboles, nondum observata est, quod sciam, hic expli-

care illius usum lubet. Esto AB hyperbole cujus asymptotæ DC & CE faciant angulum rectum, semiaxis sit CA, perpendicularis ad DAE quæ tangit hyperbolem: & ACB sit sector, lineaque CB secet AD in F. Si nunc accipiatur AC aut AD pro unitate, & AF vocetur a, quæ est fractio minor quam unitas, ubi AF & AD sunt commensurabiles; Dico, ut summa progressionis infinitæ $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{7}a^7$ &c. est ad 1, ita fore sectorem ABC ad triangulum ACD. Si vero ducantur perpendiculares AK & BL ad asymptoton, idem dici potest de spatio ABLK, quod est æquale sectori illi, ut facile videre est ex æqualitate triangulorum CAK, CBL.

Itaque progressio illa, pro hyperbole, respondet ei, quam dedit Leibnitzius pro circulo. Per quam, si sector circuli sit ACG, habens pro radio AC, ac CG secet AE in H; si AH vocetur a, & AE æqualis 1, summa progressionis $a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 - \frac{1}{7}a^7$ &c. est ad 1, ut sector ACG ad triangulum ACE, aut velut arcus AG ad rectam AE.

Quod vero attinet ad lineam jactûs obliqui, si satis esset, in ratione illa resistentiæ cognoscere motum horizontalem & verticalem corporis alicujus, ad inde componendum motum obliquum, ut in prima hypothesi; possent determinari puncta per quæ linea illa transire debet: ac eadem linea logarithmica ad id conduceret; si volveretur ita ut asymptotos illius parallela foret horizonti: quinimmo rursum fieret curva jactus, eo in casu de quo dixi antea. Sed compositio illa motûs cum hîc non admitti possit, quia nimirum diminutio motûs retardati, in diagonali alicujus rectanguli, non est proportionalis diminutionibus per latera; difficillimum est, si non omnino impossibile, solvere hocce problema.

Motus horizontalis seorsim consideratus, ut in globo qui volveretur in tabulato aliquo lævi, id habet notatu dignum, quod debeat in infinitum procedere, quocunque

que etiam modo resistat medium; cum è contrario limites habeat motus certumque terminum nunquam attingat corpus, quando resistentia est ut velocitas. Infinitum autem esse in primo casu facile patet ex prop. 5. lib. 2. Newtoni, quia spatium, comprehensum inter hyperbolen illiusque asymptoton, est magnitudinis infinitæ.

De proprietatibus Lineæ Logisticæ.

PRoprietates Lineæ Logisticæ, quas recensiturum me pollicitus fui, & è quibus aliquæ inservierunt ad reperienda ea quæ observavi circa motus per aëra, sunt illæ, quæ sequuntur; præter primam de qua jam dixi, proportionalitatem nempe ordinatorum ad asymptoton, quando æque distant, per quam in illa linea reperiuntur puncta.

1. Spatia comprehensa duabus ordinatis ad asymptoton sunt inter se ut ordinatarum illarum differentiæ. Sic, in hacce figura, ubi AVD est Logistica, BO illius asymptotos, & ordinatæ, AB, VC, DQ; è quibus istæ ultimæ productæ occurrunt AK parallelæ asymptoto, in E, K; spatia ABCV, ABQD sunt inter se ut rectæ EV, KD. TAB. IX. fig. 8.

2. Iisdem positis & AO factâ tangente in puncto A, ac secante CE, QK, in I & G; spatia AVE, ADK sunt inter se ut rectæ VI, DG.

3. Spatium comprehensum duabus ordinatis est ad spatium infinitum, quod, à minima ex ordinatis illis, extendit se logisticam inter ejusque asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum ad minimam. Cum vero dico spatium infinitum habere certam quamdam rationem ad spatium aliquod finitum, significat illud tam prope accedere ad magnitudinem spatii dati, quod habeat proportionem illam ad spatium finitum, ut differentia possit fieri minor quam spatium quodlibet datum. Spatium ABQD est ad spatium infinitum quod à AQ extendit se inter curvam & asymptoton, ut KD ad DQ.

4. Subtangens, ut BO, est semper ejusdem longitudinis, ad quodcunque etiam punctum logisticæ pertineat tangens.

5. Longitudo illa per approximationem reperitur, & est ad partem asymptotæ comprehensam inter ordinatas rationis duplæ, ut 43429448190325 1804 ad 30103999566398 1195, aut fere ut 13 ad 9.

6. Si sint tres ordinatæ, ut AD, HG, BF, & è puncto curvæ & minimæ harum, ducatur parallela ad asymptoton quæ secat duas alias ordinatas in R & K, & tangens QB quæ easdem secet in N & Q; spatia trilinea ABK, HBR sunt inter se, ut partes ordinatarum inter curvam & tangentem, scilicet ut AQ, HN. TAB. IX. fig. 5.

7. Spatium infinitum inter ordinatam, logisticam, & ejus asymptoton; ubi duæ istæ postremæ ad sese mutuo accedunt, est duplum trianguli quèm faciunt ordinata, Tangens ducta ex eodem puncto ac ordinata, & subtangens. Sic, spatium infinitum, ab ordinata BF, est duplum trianguli BFO.

8. Spa-

8. Spatium, comprehensum duabus ordinatis, est æquale rectangulo ex subtangente & differentia earumdem ordinatarum. Sic, spatium ADFB est æquale rectangulo subtangentis FO & KA.

9. Solidum, quod producit spatium infinitum ab ordinata aliqua, volvendo se circum asymptoton, est sesquialterum Coni, cujus altitudo æqualis est subtangenti, & Semidiameter baseos æqualis eidem ordinatæ. Sic solidum, quod spatium infinitum BFOC facit, volvendo se circum FO, & sesquialterum coni, quem facit triangulum BFO, volvendo se circum eandem FO.

10. Solidum productum ab eodem spatio infinito, volvendo se circum ordinatam BF à qua incipit, est sextuplum coni quem facit triangulum BFO, per conversionem suam circa BF. E qua solidorum mensura hoc sequitur, quod

11 Centrum gravitatis spatii infiniti, ab ordinata una, distat ab ea longitudine subtangentis.

12. Quod idem illud centrum gravitatis distat ab asymptoto, quartâ parte ordinatæ.

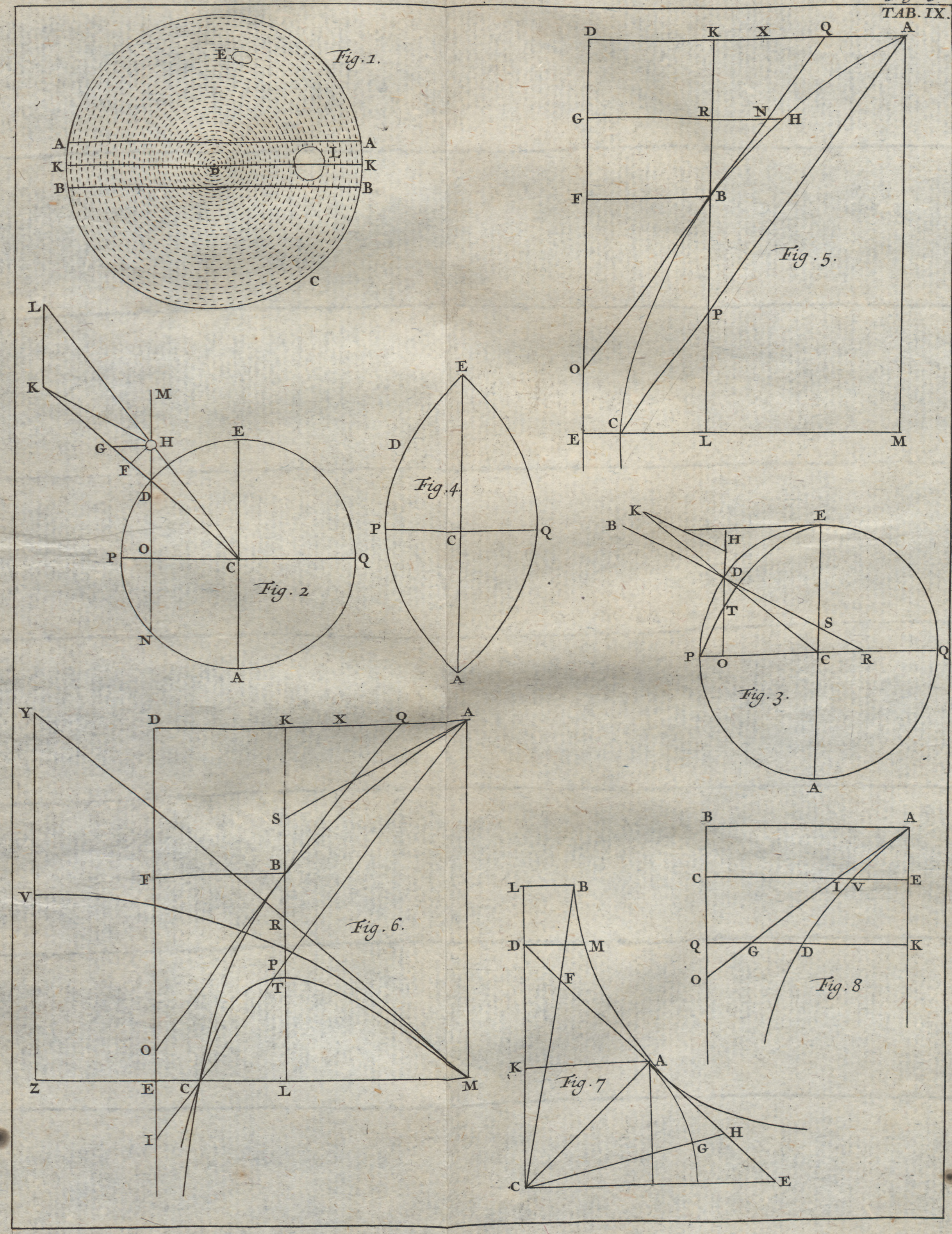
13. Repereram etiam centrum gravitatis primi ex solidis illis infinitis distare à sua basi, dimidiâ parte subtangentis.

14. Centrum vero gravitatis alterius solidi distat à sua basi infinita, octavâ axis sui parte.

15. Lineam illam logisticam conducere ad quadraturam hyperboles, abunde notum est ex demonstrationibus Patris Gregorii à S. Vincentio, de spatiis hyperbolicis comprehensis duas inter ordinatas super una ex asymptotis. Ut &, si duo sint ejusmodi spatia, è quibus unius ordinatæ sint ut AD ad HG, & ordinatæ alterius ut BF ad CE; spatia illa inter se fore ut lineæ DG, ad FE. Verum neminem scio observasse eadem illa spatia hyperbolica esse ad parallelogrammum hyperboles (sic voco parallelogrammum cujus latera sunt duæ ordinatæ super asymptotis, ductæ ex eodem sectionis puncto) ut singulæ quæque ex lineis DG, FE ad subtangentem FO. Adeoque, si parallelogrammum hyperboles ponitur 0, 4342944819 partium, singulum spatium hyperbolicum, comprehensum duas inter ordinatas ad unam ex asymptotis, erit ad parallelogrammum illud, ut logarithmus proportionis earumdem ordinatarum; id est ut differentia logarithmorum numerorum, qui exprimunt proportionem ordinatarum, ad numerum 0, 4343944819; sumptis Logarithmis decem characterum præter characteristicam.

Hinc facile est confirmare quadraturam hyperboles, quam dedi in tractatu de evolutione linearum curvarum, quem videre est in meo *Horologio oscillatorio*.

FINIS.


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8




POLITECHNIKA GDAŃSKA
BIBLIOTEKA
CENTRALNA

GEOMETRICA DEMONSTRATIO THEOREMATUM HUGENIANORUM

CIRCA

LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM,

Qua occasione plures Geometricæ Methodi exhibentur circa Tangentes, Quadraturas, Centra gravitatis, Solida, &c. variarum curvarum, uti infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, &c. Aliæque Geometricæ Veritates illustrantur.

ADDITA EPISTOLA GEOMETRICA AD P. THOMAM CEVAM S. J.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO

CREMONENSI,

Monacho Camaldulensi, & in Almo Pisano Lyceo Publ. Phylosophiæ Professore.

AD SERENISSIMUM

FERDINANDUM III.

MAGNUM ETRURIÆ PRINCIPEM.

SERENISSIME PRINCEPS.



Singularis in Bonas Artes, maximèque in Mathematicas Diſciplinas, Ser. Celſ. Tuæ Genius, atque in earumdem cultores, MEDICEO PRINCIPE verè digna, Propenſio, & animum, & ſtimulos addiderunt, ut apud eamdem Celſitudinem Tuam Opuſculum hoc Geometricum collocarem. Enimverò maximum operæ compendium facturum me intellexi, ubi ſpeculationes has meas ejuſmodi Principi conſecrarem, apud quem, & Scientiæ ſublimitas, & Argumenti præſtantia, & Doctrinæ utilitas nonniſi

superfluè commendanda foret, nec repetitis, aut votis, aut precibus opus esset ad illius Tutelam Operi simul, Auctorique impetrandam. Horum scilicet studiorum pretium abundè nosti, Principum Optime, imò & nos ipsos non opere minùs, quàm verbo doces, quanti ipsa facienda sint, dum in illorum præsidium, qui eadem promovere student, ultrò Ipse descendis, quò confidentiùs, & securiùs ad Te accedere non vereantur. Omne igitur officium satis explevero, si citra verborum circuitum, brevi dumtaxat, simplicique narratione, quale mihi argumentum hìc tractandum susceperim, aperuero.

Clarissimus Vir Christianus Hugenius (notum Celsitudini Tuæ nomen, pro Litteraria, qua tantoperè excellis, Eruditione Tua, in Astronomicis præsertim, Physicis, & Geometricis rebus, quas ille disciplinas summè illustravit) ex *Logisticæ*, seu *Logarithmicæ* Lineæ proprietatibus, nonnullas planè admirabiles ad calcem suæ Diatribæ de causa Gravitatis, citrà demonstrationem ullam, nudè proposuit, quibus ipsemet usus fuerat, ad arduas physicæ veritates in eodem tractatu indicandas, variorumque problematum determinationem, ad motum corporum, seu per aerem projectorum, seu proprio pondere descendentium, computata etiam medii resistentia, perti-

pertinentium expediendam. Quum itaque insignes adeò, ac geometrica contemplatione per se dignissimas esse proprietates illas animadverterem, ac præterea in Philosophicis etiam usum habere posse, è re futurum judicavi, ut iisdem demonstrandis operam darem, quò pleniùs de ipsarum veritate constaret, eòque tutiùs deinceps ad Physicam transferrentur; Longissimè siquidem à Geometriæ ditione exulare cognoveram Pythagoricum illud, *Ipse dixit*, parvamque adeò solius pronunciantium Auctoritatis in hac Scientia rationem haberi; atque id quidem meritò, quippe & Magnorum aliquando Virorum determinationibus absque demonstratione propositis (seu methodi, seu applicationis, seu calculi lapsu, quem in extendenda demonstratione facillimè animadvertissent) falsitatem irrepsisse deprehendimus. Evidentiam itaque in ejusmodi esse exigendam, quæ Geometricis potissimùm ratiociniis est concilianda. Geometricè idcircò singulas, ex propositis ab Hugenio Logisticæ Proprietatibus, demonstrare aggressus sum, nec uno plerumque modo, sed pluribus, iisque admodùm generalibus, atque ad infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, aliarumque variarum curvarum Tangentes, Quadraturas, Solida determinanda conducentibus, ut non soli Logisticæ,

ſed omnibus ferè ſub Geometricam conſiderationem cadentibus figuris, præſentis Opuſculi utilitas communis eſſet.

Et hic quidem, SERENISS. PRINCEPS, hujus Commentarioli mei ſcopus, hæc ſumma eſt, quod cùm per ſe ſe exiguum ſit, ſuique ratione Auctoris obſcurum, Tui Nominis tamen Luce ejus fronti affulgente, non uſque adeò vileſcere poterit, imò & ſupra conditionis, atque indolis ſuæ ſortem ſperare incipiet; quamquàm id unum mihi abundè ſuffecturum ſit, ut mei erga S. C. T. obſequii, gratæque erga Auguſtiſſimam MEDICEAM Domum, cui tot beneficiis devincor, obſervantiæ, acceptum Tibi pignus, perpetuumque in omnem poſteritatis memoriam monumentum exiſtat.

Ex Monaſt. Angelorum Flor. Idib. Julii MDCCI.

Sereniſſ. Celſitud. Tuæ

Humillimus, Addictiſſ. atque Obſequentiſſ. Famulus
D. Guido Grandus Monachus Camald.

A D

AD LECTOREM PRÆFATIO.

1 Consuetudinis est apud Geometras vetustissimæ, ut quæ ab aliis sine demonstratione proposita sunt, sive Theoremata, sive Problemata, sibimet ostendenda, ac geometricè confirmanda assumant, vel exercitationis propriæ, vel communis utilitatis gratia, ut certa ab incertis, à falsis vera secerni possint, atque hæc tutò recipi, ac in usum, si quem habent, converti, illa tanquam spuria, & fallaciter asserta respui, & amandari; id vel ex uno Archimede constare potest, qui in Præfatione ad Libros Spiralium, Cononem summis laudibus celebrat, ejusque inventa Mathematicis, sine demonstratione proposita, sibi demonstranda assumit; id quod tam accuratè, tantoque ingenio præstitit, *ut*, Bullialdo teste, *in sui admirationem, cùm æquales, tùm posteros converterit*; *laudum titulos, nullo oblivionis situ inducendos, meruerit, earumque* (Spiralium) *inventori Cononi gloriam, palmamque præripuerit.* Enimverò, qui in aliorum propositionibus demonstrandis operam collocant, quàm arduam, difficilemque in se provinciam suscipiant, Vir Cl. Galilæus in Trutinatore, *pag.* mihi 48. luculenter ostendit, dum ait: *Longè sublimioris ingenii est alieni Problematis enodatio, aut ostensio Theorematis, quàm novi cujuspiam inventio; Hæc quippe fortunæ in incertum vagantibus obviæ plerumque esse solet; tota verò illa, quanta est, studiosissimam attentæ mentis, in unum aliquem scopum collimantis, ratiocinationem exposcit.*

2. Eum-

2. Eumdem & ipse pulverem agitare aggressus, quemadmodùm ante biennium Vivianea Problemata tibi geometricè demonstrata obtuli, innumeris aliis veritatibus, seu planè novis, seu majori compendio ex prolixa Veterum supellectili deductis, Conicorumque præsertim Fornicum Tetragonismo locupletata; ita nunc HUGENIANA THEOREMATA, longè adhuc plurium speculationum campum, pro variis, iisque generalibus methodis, quibus in eorumdem demonstratione uti placuit, aperientia, communicare proposui. Seriùs id quidem, si Theorematum Hugenii propositionem spectes, illa quippe ad calcem Diatribæ *de Causa Gravitatis*, Tractatui *de Lumine* ejusdem Auctoris adnexæ, usque ab Anno 1690 Lugduni Batavorum excusa jam prostant; Sin verò eadem animadvertendi copiam ante paucos menses mihi nunc primùm factam attendas, satis adhuc tempestivè. Hoc scilicet Anno dumtaxat, quum Pisis degerem, & obeundis Phylosophicæ Cathedræ, ad quam Regiæ Magni Etruriæ Ducis Celsitudinis Beneficentia nuper vocatus fueram, muneribus incumberem, apud Humanissimum æquè, ac Nobilissimum Juvenem Lucam Albizium S. Stephani Equitem, in his, quæ ad Geometriam, ad Physicam, multiplicemque Eruditionem spectant, apprimè versatum, prælaudati Hugeniani Tractatus exemplar tandem invenire, ac sedulò evolvere potui. Rapuit animum statim Propositionum illarum, quæ & *scitu* jucundæ, & vestigatu difficiles videbantur, Utilitas, atque Elegantia; inde siquidem, ipsomet Hugenio fatente, pendere videbam, quæ Vir Clarissimus de Gravium projectione perpendiculari, & obliqua, eorumque descensu pronunciaverat, in hypothesi, quòd resistentiæ mediorum in eadem ratione crescerent cum velocitatibus corporum, utì eatenùs creditum fuerat. Ac de Physicis quidem Propositionibus vix sollicitus fui, quum jam de hypothesi non conveniret, majorque,

que, Hugenio teste, se oblatura esset in ipsarum demonstratione difficultas, quàm quæ rei pretio compensaretur.

3. De Geometricis secus apud me statui: legeram apud Serenum Antistensem Epist. ad Cyrum, præfixa lib. 1. de sect. cylindri. *Absurdum omnino videri, Geometras ipsos de Problemate Geometrico sine demonstratione quicquam affirmare*; & quamvis longissimè abessem ab ejusmodi consuetudine, generaliter idcircò damnanda, quum scirem, justis de causis, seu temporis inopia, seu brevitatis studio, sive exercitationis Lectorum gratia, id aliquando licere, quemadmodum & nobis, tum in proximè edito, tum in præsenti etiam Opusculo nonnulla exciderant citra demonstrationem asserta, Geometriæ tamen, ac Physicæ promovendæ plurimùm interesse putavi, ut miranda hæc Theoremata ad Logisticam pertinentia tandem demonstrarentur, è quibus, quemadmodùm illæ, quas supra ex Hugenio laudabam, ita aliæ, & aliæ Phylosophicæ Veritates certioribus hypothesibus innixæ profluere possent, quamdiù autem illa per legitimam demonstrationem firmas radices non agerent, inculta planè, ac sterilia jecerent. Et proprio igitur genio, & Amicorum stimulis accedentibus, ut in Logisticæ Proprietatum ab Hugenio propositarum veritatem inquirerem, de iisdem accuratè demonstrandis cogitare cœpi. Quod quidem fœliciùs, quàm ab initio speraveram, deinde successit, paucarum quippe horarum meditatione, octo priorum Theorematum (quinto excepto, quod abstrusiorem sibi poscere indaginem prævideram) demonstrationem inveni; nec multis post diebus reliqua omnia enucleavi, præter duodecimum, tertium decimum, ac quintum jam ab initio intermissum, quorum Veritas, ut in apertam lucem, vel ipsa spontè prodiret, vel educi se non invita pateretur, longioris operæ officiis invitanda, roganda, ac tantùm non per vim extrahen-

trahenda fuit, nobiliorem quippe manum fortaſſe expe-
ctans, obſcuri hominis conatus refractaria dedignabatur.

4. Sed quorſum, inquies, à tanto Viro propoſita in examen vocare, & ad demonſtrationis amuſſim expendere oportuerat? An non ſatis tutò admitti poterant, citra ſuſpicionem ullam falſitatis, vel hoc ipſo, quòd acutiſſimus ille, & tot nominibus celebris Geometra rem ita ſe habere fidenter aſſeruerat? Archimedi, quidquid diceret, credendum deinceps eſſe Hyeron Syracuſius, & Gelon Siciliæ Rex pronunciarunt, apud Proclum *lib.* 2. *cap.* 3. poſtquàm Navim contra omnium opinionem loco moviſſet, & Artificis fraudem ex Coronæ pondere ad calculos revocaſſet; Quid ni igitur, citra aliam indaginem, & Chriſtiano Hugenio credimus, poſt fœliciter detectum Saturnium Annulum, poſt oſtenſas Curvarum Evolutarum proprietates, Cycloidis longitudinem demonſtratam, Pendulique oſcillationes ad iſochroniſmum revocatas, ut de aliis taceamus præclaris inventis, quibus Phyſicam, Aſtronomiam, & Matheſim denique univerſam inſigniter illuſtravit? Hæc certè ſi Archimedis tempore propoſita fuiſſent, non minùs veſtigatu ardua, inventuque difficilia cenſeri poterant, quàm minimæ potentiæ ad maximum pondus movendum per machinam elevatio, vel aurea corona permixti argenti diſcretio.

5. Ultrò ipſe fateor, dignos eſſe ſummos Geometras, utpotè Veritatis commercio maximè omnium aſſuetos, quibus, etiam eorum, quæ pronunciant, demonſtrationem reticentibus, fides nihilominus habeatur; neque enim *Mathematicos*, conceſſo *Hiſtoricis* privilegio, quis jure fraudaverit, quum ipſa *Geometria* à Pythagora *Hiſtoria* appellari conſueverit, teſte Jamblico in ejus vita, cap. 18.; imò longè potior illius ſit, quàm iſtius ratio, quippe nulla ex parte, aut à lubricis famæ rumoribus, aut ab incertis documentis, aut à præoccupato partium ſtudio ſibimet imponi patitur

titur Geometra, quum quidquam asserit, sed quod evidenti dumtaxat ratione apud se constiterit pronunciare solet; quo nomine perfectam Historiæ ideam Geometria præbet, quam utinam imitarentur qui Historicos agunt, nec quicquam temerè solis conjecturis ducti, prout sibi somniaverint, describerent, sed ea dumtaxat, quibus (quantùm materia patitur) demonstrandis se idoneos, & paratos sentiunt! Nil tamen vetat, quin & ipsi Geometræ, cùm homines sint, lapsibus quoque obnoxii esse possint; primo siquidem obtutu veri speciem prætendere potest fallax quoddam ratiocinium Geometrarum mentibus uno impetu objectum, illosque in errorem inducere, à quo facilè sibi cavissent, si speculationum suarum demonstrationem per extensum adducere, ac per singulas partes attentiùs expendere voluissent; exempla sunt, & antiqua in Conone supra laudato, quem, inter ingeniosissima inventa sua, Geometris absque demonstratione proposita, quædam complexum fuisse, quæ falsa erant, testis est idem Archimedes *loc. citat.* & recentia non desunt in Mathematicorum lectione versatis, quæ hìc referre non vacat, & alibi indicata habes *cap.* 12. *n.* 10.

6. Sed esto verissima omnia sint, quæ in Geometris sine demonstratione proponuntur (ut certè indubia sunt, quæ à Viviano, ab Hugenio, aliisque summis Viris poposita habemus, neque id fas in controversiam adducere) quamdiù hìc subsistunt Geometræ, tamdiù revera *Puri Historici* munus obeunt; quiddam amplius Geometriæ titulis accedere par est, quàm nudam Historiæ laudem: utrumque Geometria munus habet, & vera proponere (quod Historiæ commune est) & eadem demonstrare (qua singulari dote ab Historia discernitur, & summum humanæ Sapientiæ verticem meritò possidet) Historiæ sufficit, si fidem pariat; Geometria, si evidentem prætereà rerum abs se propositarum scientiam Lectorum mentibus non inducit, vix

 Geo-

Geometriæ nomen, & speciem servat. Non inutilis igitur operæ fuerit, à maximis ævi nostri Geometris asserta demonstrationibus suis communire, & quod illis, vel temporis, vel opportunitatis defectus invidit, supplere, quemadmodum pro viribus exequi, tum in antecedenti, tum in hoc nostro Opusculo conati sumus; Præsertim cùm ea occasione tam generales Tangentium, Quadraturarum, ac Dimensionum methodos aperire, Tibique, mi Lector, explanare licuerit, in quibus quid profecerim, quid aliorum inventis addiderim, Tui ipsius judicio relictum esto. Intereà, si hæc boni feceris, infinitis aliis, quæ adhuc, vel schedulis sparsa, vel ordinatiùs disposita premo, edendis animum dabis.



GUI-

GUIDONIS GRANDI
MONACHI CAMALDULENSIS
In Pisana Academia Publ. Philos. Professoris

GEOMETRICA DEMONSTRATIO
THEOREMATUM HUGENIANORUM
CIRCA LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM.

CAPUT I.

Logisticæ, seu Logarithmicæ descriptio. Ejus primaria proprietas. Logisticæ aliorum graduum. Ejusdem per duos motus generatio. Axem habet pro Asymptoto. Tàm supra, quàm infra in infinitum continuari potest. Alio duplici motu describitur. Spiralis Logarithmicæ per duos motus descriptio. Ejus primaria affectio. Ad alios gradus extendi potest. Centro per infinitos cincinnos circumvolvitur, licèt longitudine finita sit. Æquè inclinatur cuilibet radio. Gravia per ipsam delata eodem semper momento pollent, respectu momenti, quod haberent in perpendiculo, Cartesio etiam id primùm observante. Per convolutionem primæ Logisticæ gigni potest. Fallax, ex nonnullorum methodo, ratiocinium circa ejus spatii dimensionem.

1 Ecta methodus postulat, ut, antequam ad demonstrandas, quas Hugenius proposuit, Logisticæ proprietates accedamus, illius genesis, & descriptio præmittatur; imò & variis modis idem præstare non inutilis operæ pretium fuerit, inde siquidem non solùm primariæ ejusdem affectiones, ex quibus aliæ pendent, sponte sua profluere intelligentur, verùm etiam ad eorum, quæ deinceps dicenda sunt, intelligentiam haud parùm conducet clara, & distincta ejus naturæ notio, per ejusmodi varias generationes Lectorum mentibus faciliùs indita, atque altiùs infixa.

2. Logistica igitur, seu Logarithmica linea illa est, in qua ordinatæ ad æquales axis partes sunt geometricè proportionales; nempè diviso axe BQ in quotlibet partes æquales BC, CG, GQ, &c. si ad earumdem terminos ordinatæ BA, CV, GH, QD, &c. fuerint continuè proportionales, quæ per puncta A, V, H, D, (aliaque extrema zz, mm, mediarum proportionalium, æquo semper intervallo, duabus quibuslibet ordinatis interponendarum) transit linea, *Logistica*, seu *Logarithmica* appellari consuevit, eò quòd inveniendis logarithmis inserviat, uti ex sequentibus manifestum erit.

TAB. X. Fig. 2.

3. Ex hac enim definitione constat, partes axis ita correspondere ordinatis, quemadmodum Logarithmi respondent naturalibus numeris, & quòd ratio quarumlibet duarum ordinatarum, veluti BA ad CV, respectu rationis ordinatarum BA ad QD in eadem proportione erit, in qua axis partes CB, & QB per has ordinatas abscissæ; siquidem, æqualiter crescente axe, perinde æqualiter crescit ordinatarum proportio, unde quàm multiplex est QB ipsius BC, tam multiplex

plex pariter eſt ratio duarum BA, QD, rationis duarum BA, CV; & generaliter, rationes, quas invicem habent duo quælibet ordinatarum paria (etiamſi una pro communi antecedente, aut conſequente non ſumatur, ſed comparetur, verbi gratia, ratio duarum BA, CV, cum ratione, quæ eſt inter duas GH, QD) erunt ad invicem, ut partes axis quolibet ordinatarum pari interceptæ, uti ad ipſam curvæ hujus naturam attendendo, vel ſumptis, tum rationum illarum, tum axis partium æquè multiplicibus, facilè conſtare poteſt; atque hæc erit primaria Logiſticæ proprietas, per quam poterit expreſſiùs definiri, ejuſque natura clariùs determinari.

4. Ubi obiter animadvertendum erit, poſſe aliorum etiam graduum Logiſticas excogitari, ſi videlicet rationes ordinatarum BA ad CV, & BA ad QD jam non forent ut partes axis BC, & BQ, ſed ut earumdem BC, & BQ quadrata, vel cubi, aliæve poteſtates, vel etiam radices quadratæ, vel cubicæ, aliorumve graduum, ſive in ratione axis partium, ut libuerit multiplicata, vel ſubmultiplicata; adde & ſeſquialtera, vel ſeſquitertia, &c. quas quidem Logiſticarum ſpecies hoc loco minimè conſiderandas ſuſcipimus; neque verò id aut ſuſceptæ exercitationis inſtitutum poſtulat, aut temporis etiam ratio permittit, ſed de prima, & ſimpliciſſima dumtaxat, quam ſuprà deſcripſimus, ſpecie erit hic nobis cum Cl. Hugenio tractandum.

5. Porrò, quum proportionalium differentiæ ſint in eadem ratione proportionales, manifeſtum eſt, ipſas *Au*, *ud*, *dl*, *ln*, &c. interceptas axi parallelis V*u*, D*d* L*l*, N*n* æqualiter creſcentibus, fore in continua proportione earumdem ordinatarum; quare hæc linea, uti primus Logarithmorum inventor Neperus delineare aggreſſus eſt, deſcribi intelligetur duplici motu, altero lineæ AB per BF æquabiliter, ſibique æquidi- TAB. XIIII. Fig. 4.

ſtanter

ſtanter deſcendentis, altero puncti A motu continuè retardato versùs B delati, ita ut ſpatia, æqualibus quibuſcumque temporibus ſubinde tranſacta, in eadem geometrica ratione decreſcant; quomodo quo tempore linea deſcendens confecerit ſpatium BC, & ſitum CE obtinuerit, ſi punctum A venerit in *u*, jamque in puncto V reperiatur, ſequenti tempore æquali, linea per æqualem axis portionem CQ delapſa, & in QK poſita, punctum A translatum eſſe in *d*, ſpatio *ud* tranſacto, adeòque in ſitu D reperiri concipiendum eſt, ſequenti adhuc tempore, quo linea percurrerit ſpatium QF, & in FM collocata ſit, punctum ex *d* in *l* promotum, atque in ipſo L puncto conſiſtere intelligetur, ſpatiis A*u*, *ud*, *dl*, cæteriſque deinceps decreſcentibus in ratione BA ad CV; evidens enim eſt, motum, ex utroque compoſitum, fore in eadem curva AVDLN, quam priùs determinavimus.

6. Cæterùm conſtat curvam AVN, hac motuum compoſitione deſcriptam, axi BF continuò propiorem fieri, prout punctum A versùs B ſemper fluere, & ad ipſum accedere intelligitur, nec tamen evenire poſſe aliquando, ut cum ipſo axe conveniat, uno verbo, axem ipſi Logiſticæ *Aſymptoton* eſſe, quia, creſcente in infinitum axe BF per additionem æqualium partium, alia, & alia ſpatia multitudine infinita, ſemperque minora, & minora ipſi puncto A percurrenda remanent, antequam ad ipſum B perveniat, quod ideò numquam attingere poterit: ſeriei ſiquidem infinitæ A*u*, *ud*, *dl*, &c. in ratione AB ad CV, vel B*u* continuatæ ultimus terminus eſt punctum B, eò quòd, quum ſit AB ad B*u*, ut A*u* ad *ud*, erit etiam AB ad priorum duarum differentiam A*u*, ut A*u* ad differentiam duarum poſteriorum A*u*, *ud*; quare ex doctrina Progreſſionum Geometricarum, quam poſt Archimedis veſtigia in libro de dimenſione parabolæ, primus recentiorum

rum Torricellius idem argumentum tractans lemm. 27., & Cavallerius in ejusdem Scholio apud ipsum demonstrarunt, mox Gregorius à S. Vincentio, aliique deinceps fusiùs illustrarunt, erit ipsa AB summa progressionis terminorum *Au*, *ud*, *dl*, &c. in dicta ratione continua decrescentium; nec vacat id particulariùs demonstrare, quum, vel ex ipsa prima descriptione curvæ *num.* 2. adducta, simpliciùs longè innotescat hæc ipsa Logisticæ affectio, quòd scilicet ad axem tanquam asymptota propiùs accedat, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipso conveniat; continuatio quippe rationis AB ad CV per minores, ac minores terminos in infinitum fieri potest, quin umquam minimus ejusmodi terminorum reperiatur, aut aliquis omnium ultimus fingi queat.

7. Sed & eàdem ratione liquet, Logisticam DVA in immensum supra ipsam BA continuari posse, nec umquam ad certum aliquod curvæ hujus initium, ac veluti verticem, supremumque eius punctorum fontem perveniri, sed varia dumtaxat ejus segmenta per ordinatarum aliquam, veluti AB, vel CV abscissa exhiberi, nec magis punctum A, quàm V, vel D, aut aliud quodvis pro Logisticæ capite statui posse: unde & perinde esse undecumque incipias, ratio enim ordinatarum BA, & CV, tam benè ad majores terminos, quàm ad minores continuari potest, & ideò applicatis infinitis ejusmodi terminis successivè majoribus, & supra BA in immensum crescentibus, ad partes ipsius axis FB, ultra B producti, longitudine æquales prioribus BC, CQ &c., ita ut per ordinem arithmeticè crescant axis portiones, geometricè crescentibus ordinatis, eadem curva ad superiores partes in immensum continuabitur per applicatas, datam quamlibet magnitudinem excedentes, non minùs quàm ad inferiores

in infinitum produci queat, per appllicatas qualibet magnitudine data minores.

8. Illud etiam intereà animadvertiſſe juvabit, dupli-ci alio motu eamdem curvam intelligi poſſe deſcriptam, ſi videlicet imaginemur, puncto A per AP æquabiliter deſcendente, (vel muſca, aut formica per haſtam AP ſimiliter æquabili motu delata, ut & P. de Chales in logarithmis tradendis ſupponit) ipſam interim AP, lineæ BA perpendiculariter inſiſtentem, ſibi æquidiſtanter versùs B promoveri, ac ſubinde in *u*V, *d*D, *l*L, &c. reperiri, ſpatiis A*u*, *ud*, *dl*, &c. in eadem ratione geometrica decreſcentibus, prout arithmeticè creſcunt ſpatia AE, AK, AM, &c. à puncto æquabiliter deſcendente percurſa; ſic enim punctum A ſubinde reperietur in punctis, V, D, L, N, &c., reſque eodem recidere obſervabitur, ſi ad ſuperiùs dicta *num.* 5. attendamus, unde ulterioris explicationis moleſtiæ parcendum erit: quemadmodum & ejuſdem tædii compendio conſulentes, miſſam facere decrevimus (myſterii pleniſſimam) eorumdem motuum inverſam compoſitionem, qualis haberetur, ſi axis BF ab ipſa tota æternitate motu infinitè tardo per BA motus intelligeretur, ita tamen accelerato celeritatis gradu, ut integra ſpatia, quæ in fine æqualis cujuſcumque temporis particulæ tranſacta forent, veluti B*n*, B*l*, B*d*, B*u*, B*u*, BA eſſent in continua proportione geometrica, puncto aliquo intereà æquabiliter aſcendente per eumdem axem BF, ita ut poſt emenſum infinito tempore infinitum ſpatium infra G poſitum ſubinde æqualibus temporibus ad GFQCB aſcenderet, perque hanc motuum compoſitionem reperiretur ex ordine in NLDVA; aut ſi æquabilis motus ab æterno inchoatus refunderetur in lineam GP versùs BA aſcendentem, acceleratus verò in punctum G, vel B per eamdem lineam versùs

sùs P, vel A promoti, ita ut, quolibet æquali tempore, spatia percurreret geometricè proportionalia majora, ac majora *nl*, *ld*, *du*, *u*A, post emensos similiter, motu infinite tardo, in tota æternitate singulos minores, ac minores ejusdem progressionis terminos per ordinem acceptos, ita ut subinde in iisdem punctis NLDVA reperiatur, &c.

9. Aliud potius Logisticæ, seu Logarithmicæ lineæ genus, de quo infra nonnulla dicenda recurrent, exponere hac occasione non gravabor. Illa ad modum spiralis cujusdam generari intelligitur, radio circuli per circumferentiam æquabiliter moto, dum punctum quoddam ab extremo radii versùs centrum, motu in geometrica proportione retardato, procurrit, ita ut quidquid præstat axis Logisticæ BF in curva superiùs exposita, id in spirali, de qua loquimur, praestet circuli peripheria in arcus æquales divisa; quod verò præstabant ibi ordinatæ BA, CV, QD, &c. geometricè proportionales, id in præsenti efficient radii à centro ad hujus spiralis puncta exporrecti. Itaque, exposito quovis circulo CAF*f*, determinatisque quotlibet æqualibus arcubus AF, F*f*, *ff*, ponantur radiorum correspondentium portiones CA, C*a*, C*a* geometricè proportionales; erunt puncta A, *a*, *a*, in curva *Spirali Logistica*, aliis *Spiralis Logarithmicæ*, quibusdam *Spiralis Geometricæ* nomine appellata, quæ pariter ad infinitos gradus extendi posset, si fingerentur radiorum ejus rationes non tantùm in simplici, sed & in multiplicata, aut submultiplicata qualibet arcuum abscissorum ratione crescere, prorsus ut de prima Logistica dictum est suprà *num.* 4. sed enim in prima hujus spiralis simplicissima specie sistimus, nec aliis pro nunc implicamur. TAB. XV. Fig. 8. 10.

10. Et quidem hìc pariter, si radii CA, C*a*, sint ut numeri, arcus respondentes FA, *f*A, erunt ut Logarithmi,

rithmi, eritque prima hujus curvæ affectio, quòd ratio duorum quorumlibet radiorum ad rationem duorum quorumlibet aliorum sit, ut nuper indicavimus, in eâdem proportione, in qua sunt arcus binis quibuslibet radiis intercepti, prorsus ut de rationibus ordinatarum, deque partibus axis in prima Logistica acceptis supra dicebatur *n.* 3. Unde & constat, Spiralem Logisticam utrinque pariter in infinitum continuari posse, tum ad majores, tum ad minores terminos, continuata ratione radiorum crescentium, aut decrescentium circa centrum, circa quod per infinitos cincinnos hæc curva convolvetur, prout infinities repetentur arcus æquales, per quos distare debent radii illi proportionales, adeòque integræ circulationes numero infinitæ sibi invicem superponentur, centro intereà respectu curvæ quasi asymptoto sese habente, quippe ad illud magis, magisque accedent curvæ puncta intervallo minore quolibet dato, prout diminuentur proportionaliter radii, nec aliquando tamen in ipsum centrum desinent, quum ad minimum horum terminorum perveniri non possit: quæ res, ut patebit, curiosa contemplatione non vacat, (non minùs quàm si motuum, quibus describitur, compositionem inversè consideres eo modo, quo in prima Logistica fieri posse indicavimus sub finem *num.* 8.) manifestum est enim, totam, quanta esse possit, hujusmodi curvam per infinitos cincinnos infinitè multiplici gyro se circa centrum convolventem, determinatæ rectæ lineæ longitudinem minimè excedere, longitudinem scilicet suæ tangentis AB usquè ad radium perpendicularem ex centro excitatam productæ; quod & ab aliis pridem observatum video, facilemque habet demonstrationem ex infra dicendis, *cap.* 5. *num.* 10.

11. Sed & illud per se propemodùm constat, atque ex præmissa hujus Spiralis genesi sponte profluit, radios

dios ad quodlibet ipsius curvæ punctum æquè inclinari, ita ut constans, certus, & determinatus semper sit angulus CaA, quem quilibet radius cum curva ad easdem partes constituit; siquidem hoc spirali spatio in triangula infinitè parva æqualium ad centrum angulorum distributo, veluti se habent ACa, aCa, &c. constat illa similia fore, propter latera circa æquales angulos proportionalia, quapropter & alii anguli homologi æquales erunt; itaque si ponatur, punctum C esse Terræ centrum, in quod gravia collimant; quæratur autem curva (in suppositione perpendicularium, seu linearum directionis, non æquidistantium, ut physicè sumi solent, sed in centrum convergentium, uti revera esse censentur) in qua grave positum, & per quam delapsum, idem in quolibet puncto momentum retineat, respectu momenti, quod habet in perpendiculo, ita ut illud ad hoc (ubicumque considerentur) eamdem semper determinatam rationem obtineat, ea certè non alia esse poterit, quàm Spiralis hæc Logarithmica, cujus inclinatio ad radios aC (exprimentes veram gravium directionem, veraque perpendicula, in quibus momentum maximum, seu totale exercetur) numquam immutatur, sed semper eadem perseverat, contra quàm faciat recta quælibet, velut AB, exhibens planum aliquod inclinatum, in quo positum grave (juxta rigorem geometricum perpendiculorum convergentium) non idem in quolibet puncto momentum habere potest, nec eadem semper esse hujus momenti ratio ad momentum in perpendiculo [ut ut id re ipsa à Mechanicis sapienter assumatur, quippe in tanta à centro distantia perpendicula quasi parallela habentur, aut rectæ illius portio cum Logisticæ Spiralis portione reipsa coincidit] ob varium inclinationis angulum ubique inconstantem, quem diversa ejusdem rectæ puncta cum centro conjuncta constituunt, unde

de & momentum ad singula ferè puncta in rigore variari continget.

Post hæc autem scripta inveni & Celeberrimum Cartesium par 1. Epistolar. ep. 73. Mersenno jam indicasse lineam, in qua momenta non variantur, esse quamdam spiralem, rogatumque ut ejus naturam indicaret, reposuisse epist. sequ. eam talem esse, ut ejus tangentes sint ad radios ubique æqualiter inclinatæ, & curvæ portiones radiis illas abscindentibus esse proportionales; quod re ipsa Logisticæ, seu Geometricæ Spirali convenit, ut monuimus.

TAB.XI. Fig. 8. 12. Hæc eadem porrò Spiralis Logistica intelligi etiam posset describi per convolutionem primæ Logisticæ, de qua supra loquuti sumus, toto axe BQ in punctum centri contracto, ipsa verò AK in peripheriam circularem radii BA (repetito, ut opus fuerit, circumvolutionis gyro) curvata, singulisque ejus æqualibus partibus in partes arcus contortis, ordinatis intereà BA, CV, QD in totidem radios à centro deductos abeuntibus, atque à parallelismo ad convergentiam in idem centrum translatis; uti viceversà primam Logisticam per evolutionem hujus Spiralis, rectificata circuli peripheria, & radiis sese explicantibus, atque ad parallelum situm redeuntibus, conformari quis concipere posset. Cave autem putes, Logisticam in Spiralem contractam, spatium continere dimidium ejus, quod explicata complectebatur, eò quòd infinitè parva parallelogramma Bz, xz, &c. ex quibus illa evoluta constabat, in totidem abeant triangula parallelogrammorum dimidia, ex quibus Spiralis Logisticæ spatium absolvitur. Ejusmodi enim ratiocinium (ut ut celebrium Geometrarum methodo conforme) plerumque fallax esse deprehenditur, quia non eadem retinetur in convolutione dictorum triangulorum altitudo, quæ priùs fuerat parallelogrammorum, (quamquàm in certa ratione

ratione semper varietur) utì nec eadem basis, quæ enim priùs curva Logistica infinita erat, in Spiralem Logisticam longitudine finitam convertitur; Unde, circa Spiralis hujus Logistici spatii dimensionem, ea dumtaxat sunt attendenda, quæ infra *cap. 7. n. 13.* ex evidentioribus principiis generaliter deducemus. Atque hæc intereà, ad ingenerandam Tyronibus Logisticæ lineæ, de qua deinceps agendum erit, notitiam, prælibasse sufficiat. Nunc quæ sint nobis ad mentem Hugenii demonstranda, allatis Clariss. Auctoris verbis, breviter indicabimus.

CAPUT II.

Logisticæ proprietates ab Hugenio propositæ. Spatiorum, sive ad axem, sive ad ejus parallelam ordinatis interjectorum, tum ad invicem, tum ad infinitum reliquum Logisticæ spatium proportio. Subtangentis longitudo semper eadem, & quæ. Trilineorum Logisticæ proportio. Infinitum Logisticæ spatium, cujus trianguli duplum. Cui rectangulo æqualia reliqua spatia. Solida ex infinito spatio Logisticæ circa axem, vel circa ordinatam revoluto, quam proportionem habeant ad conos inscriptos? Centrum gravitatis Spatii Logistici, in qua ab axe, & ab ordinatis distantia? Prædictorum solidorum gravitatis centra determinantur. Quomodo Logistica hyperbolæ tetragonismo conducat, & quam proportionem habeant hyperbolica spatia ad parallelogrammum quodlibet asymptotis inscriptum?

Ipsis Clarissimi Auctoris verbis latinè redditis, Logisticæ proprietates referre placet, prout idem ipse nobis illas propositas voluit ad calcem suæ Diatribæ de *Causa Gravitatis*, ubi sic habet. Vide supra pag. 135.

Les

Les proprietez de la Ligne Logistique, que j'ai promis de raporter, & dont quelques unes ont servi à trouver ce que j'ai remarqué touchant les mouvemens à travers l'air, sont les suivantes; outre la premiere, que j'ai deja indiquée, de la proportionalité des ordonnées à l'asymptote, quand elles sont également distantes, par la quelle on trouve des points dans cette ligne.

1. *Que les espaces compris entre deux ordonnées à l'asymptote, sont entre eux comme les differences de ces ordonnées. Ainsi dans cette figure, où AVD est la Logistique, BO son Asymptote, & les ordonnées AB, VC, DQ, dont ces dernieres, étant continuées rencontrent AK parallele à l'Asymptote en E, K; les espaces ABCV, ABQD, sont entre eux, comme les droites EV, KD.*

TAB. X. Fig. 3.

2. *Que les mêmes choses étant posées, & AO étant la tangente au point A, la quelle coupe CE, QK, en I,*

Proprietates Lineæ Logisticæ, quas referre promisimus, & quarum nonnullæ iis investigandis deservierunt, quæ circa gravium motus per aërem superiùs adnotavimus, sequentes sunt; præter jam indicatam, proportionalitatis ordinatarum ad asymptoton, quando æqualiter distant, cujus beneficio plura hujus lineæ puncta reperiri possunt.

1. Quòd spatia comprehensa inter duas ad asymptoton ordinatas sunt inter se, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in præsenti figura, ubi AVD Logistica est, BO ejusdem Asymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarum duæ postremæ continuatæ conveniunt cum AK ipsi Asymptoto parallela in E, K; spatia ABCV, ABQD sunt inter se, ut rectæ EV, KD.

2. Quòd iisdem positis, & AO curvam tangente ad punctum A, quæ secet ipsas CE, QK in I, & G; spatia

I, & G; les espaces AVE, ADK sont entre eux, comme les droites VI, DG.

3. *Que l'espace compris entre deux ordonnées, est à l'espace infini, qui, depuis la moindre de ces ordonnées, s'étend entre la Logistique, & son Asymptote, comme la difference des mêmes ordonnées est à la moindre. Quand je dis, que l'espace infini a une certaine raison à un espace fini, cela signifie qu'il aproche si prés de la grandeur d'un espace donné, qui a cette proportion à l'espace fini, que la difference peut devenir moindre qu'aucun espace donné. Dans la figure précedente l'espace ABQD est à l'espace infini, qui depuis DQ s'etend entre la courbe, & l'asymptote, comme KD à DQ.*

4. *Que la soutangente, comme BO dans la même figure, est toûjours d'une même longueur, à quelque point de la Logistique que la tangente apartienne.*

5. *Que cette longueur se trou-*

spatia AVE, ADK inter se sunt, ut rectæ VI, DG.

3. Quòd spatium duabus ordinatis interjectum est ad infinitum spatium, quod post minorem harum ordinatarum exporrigitur inter Logisticam, & ejus Asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum est ad minorem. Quum porrò dicimus infinitum spatium ad quoddam finitum in quadam ratione esse, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum spatium, quod finito illi spatio in dicta ratione respondeat, ut differentia minor evadere possit qualibet magnitudine data. In præcedenti figura spatium ABQD est ad infinitum spatium, quod post QD, curvæ, & asymptoto interjicitur, ut KD ad DQ.

4. Quòd subtangens, velut BO in eàdem figurâ, ejusdem semper ést longitudinis, ad quodcumque Logisticæ punctum tangens pertineat.

5. Quòd hæc longitudo per

trouve par aproximation, & qu'elle est à la partie de l'asymptote, comprise entre les ordonnées de la raison double, comme 434294481903251804 *à* 301039995663981195; *ou bien prés, comme* 13 *à* 9.

TAB. XI. Fig. 7.
6. *Que s'il y a trois ordonnées, comme dans cette figure sont AD, HG, BF, & que du point de la courbe, apartenant à la moindre, on mene une parallele à l'asymptote, qui coupe les deux autres ordonnées en R, & K, & une tangente BQ, qui les coupe en N, & Q; les espaces trilignes ABK, HBR sont entre eux, comme les parties des ordonnées entre la courbe, & la tangente, sçavoir comme AQ, HN.*

7. *Que l'espace infini entre une ordonnée, la Logistique, & son Asymptote du côté, que ces deux dernieres vont en s'approchant, est double du triangle, que font l'ordonnée, la tangente menée du même point que l'ordonnée, & la soutangente. Ainsi, dans la même figure, l'espace infini,*

per aproximationem reperitur, estque ad partem asymptoti interceptam ordinatis duplæ proportionis, ut 434294481903251804 ad 301039995663981195, seu proximè, ut 13 ad 9.

6. Quòd si fuerint tres ordinatæ, velut in hac figura se habent AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur asymptoto parallela, secans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ easdem secans in N, & Q; spatia trilinearia ABK, HBR sunt inter se, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, scilicet, ut AQ, HN.

7. Quòd spatium infinitum inter ordinatam, logisticam, & asymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum est trianguli comprehensi ordinatâ, tangente ad idem ordinatae punctum, ac subtangente. Sic in eâdem figurâ spatium infinitum, post ordinatam BF, duplum

ni, depuis l'ordonnée BF, est double du triangle BFO.

8. *Que l'espace, compris entre deux ordonnées, est égal au rectangle de la soutangente, & de la difference des mêmes ordonnées. Ainsi, dans la même figure, l'espace ADFB est égal au rectangle de la soutangente FO, & de KA.*

9. *Que le solide que fait l'espace infini depuis une ordonnée, en tournant autour de l'asymptote, est sesquialtere du Cone, dont la hauteur est égale à la soutangente, & le demidiametre de la base égal à la même ordonnée. Ainsi le solide que fait l'espace infini BFOC, en tournant autour de FO, est sesquialtere du Cone qui fait le triangle BFO, en tournant autour du même FO.*

10. *Que le solide produit par le même espace infini, en tournant autour de l'ordonnée BF, depuis laquelle il commence, est sextuple du Cone, qui fait le triangle BFO, par sa conversion sur BF. De laquelle mesure des solides il s'ensuit,*

11. *Que*

plum est trianguli BFO.

8. Quòd spatium, duabus ordinatis interjectum, æquale est rectangulo subtangentis in differentiam earumdem ordinatarum; sic in eâdem figurâ spatium ADFB æquatur rectangulo subtangentis FO in KA.

9. Quòd solidum productum ab infinito spatio, post aliquam ordinatarum in conversione circa asymptoton, est sesquialterum Coni, cujus altitudo æquetur subtangenti, basis verò semidiameter ordinatæ par fuerit. Ita solidum genitum ab infinito spatio BFOC, in conversione circa FO, sesquialterum est Coni geniti ex triangulo BFO circa eamdem FO revoluto.

10. Quòd solidum productum ab eodem infinito spatio in conversione circa ordinatam BF, post quam exporrigitur, sextuplum est Coni geniti ex triangulo BFO in conversione circa BF. Ex qua quidem solidorum mensurâ consequitur,

11. Quòd

11. *Que le centre de gravité de l'espace infini, depuis une ordonnée, est distant de cette ordonnée, de la longueur de la soutangente.*

12. *Que ce même centre de gravité est distant de l'asymptote, du quart de l'ordonnée.*

13. *J'avois aussi trouvé, que le centre de gravité du premier des dits solides infinis, est distant de sa base, de la moitié de la soutangente.*

14. *Et que le centre de gravité de l'autre solide est distant de sa base infinie, d'un huitiéme de son axe.*

TAB. XIII. Fig. 6.

15. *On sçait assez, que cette ligne Logistique sert à la Quadrature de l'Hyperbole, depuis les demonstrations du P. Grégoire de Saint-Vincent, touchant les espaces Hyperboliques compris entre deux ordonnées sur une des asymptotes. Et que s'il y a deux tels espaces, dont les ordonnées de l'un soient comme AD à HG & les ordonnées de l'autre, comme BF à CE; ces espaces seront entre eux comme les lignes DG à FE. Mais on n'a point*

11. Quòd centrum gravitatis infiniti spatii post unam ordinatarum, distat ab hac ordinatâ longitudine subtangentis.

12. Quòd idem gravitatis centrum distat ab asymptoto per quadrantem ordinatæ.

13. Reperimus etiam, quòd centrum gravitatis primi, ex dictis solidis infinitis, distat à sua basi per semissem subtangentis.

14. Et quòd centrum gravitatis alterius solidi, distat ab ejus infinita basi per octantem sui axis.

15. Notum jam est, hanc Logisticam lineam Tetragonismo Hyperbolæ deservire, post demonstrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa Hyperbolica spatia, duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjecta; quòdque si duo fuerint hujusmodi spatia, in quibus ordinatæ unius sint, ut AD ad HG & ordinatæ alterius, ut BF ad CE, hæc spatia erunt inter se, ut lineæ DG, & FE. Nondum autem, quod sciam, innotuit, hæc ipsa spatia

point remarqué, que je sçache, que ces mêmes espaces Hyperboliques sont au Parallelogramme de l'Hyperbole (j'appelle ainsi le parallelogramme, dont les côtez sont les deux ordonnées sur les asymptotes, tirées d'un même point de la Section) comme chacune des lignes DG, FE, à la soutangente FO. De sorte que, si le Parallelogramme de l'Hyperbole est supposè de o, 4342944819 *parties, chaque espace Hyperbolique, compris entre deux ordonnées à une des asymptotes, sera à ce parallelogramme, comme le Logarithme de la proportion des mêmes ordonnées, c'est-à-dire, comme la difference des Logarithmes, des nombres qui expriment la proportion des ordonnées, au nombre* o, 4342944819; *en prenant des Logarithmes de* 10 *characteres outre la caractéristique.*

Et d'ici il est aisé de verifier la Quadrature de l'Hyperbole que j'ai donnees dans le Traité de l'Evolution des Lignes Cour-

spatia hyperbolica esse ad parallelogrammum hyperbolœ (sic voco parallelogrammum, cujus latera sint duæ ad utramque asymptoton ordinatæ ex eodem puncto Sectionis ductæ) ut unaquæque linearum DG, FE est ad subtangentem FO. Adeò ut, si parallelogrammum hyperbolæ suponatur partium o, 4342944819, quodlibet hyperbolicum spatium, duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjectum, erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet, ut differentia Logarithmorum respondentium numeris exprimentibus proportionem ordinatarum, ad numerum o, 4342944819; acceptis Logarithmis decem notarum ultra caracteristicam.

Atque hinc facile est veritatem ostendere Tetragonismi Hyperbolici abs me propositi in tractatu de Evolutione Curvarum, quem *Horo-*

Courbes, qui est dans mon Horologium Oscillatorium.	*Horologio Oscillatorio* insertum invenies.

Hactenus Viri Clarissimi æquè, ac Doctissimi Theoremata perinde nova, atque admirabilia: nunc ad eadem demonstranda accedamus.

CAPUT III.

Primo Theoremate proposito, ostenditur aggregata quotlibet geometricè proportionalium à minimo esse inter se, ut differentiæ terminorum maximi, & minimi. Incommensurabiles magnitudines per ablationem quantitatis minoris, qualibet data, reddi commensurabiles. Hinc primi Theorematis Hugeniani demonstratio more Archimedeo. Spatia Logisticæ æquè alta sunt inter se, ut homologæ ordinatæ, spatia quoque infinitè longa sunt, ut bases. Quodvis spatium ad subsequens infinitum est, ut differentia suarum ordinatarum ad minorem. Hinc secunda ejusdem primi Theorematis demonstratio.

1 A Primo igitur Theoremate Clarissimi Hugenii auspicantes rem ipsam propiùs attingamus. Illud, ut vidimus, est: *Quòd spatia comprehensa inter duas ad asymptoton ordinatas sunt inter se, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in præsenti figura, ubi AVD Logistica est, BO ipsius asymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarum duæ postremæ continuatæ conueniunt cum AK ipsi asymptoto parallela in E, K; spatia ABCV, ABQD sunt inter se, ut rectæ EV, KD.* Quod ut demonstremus, duo omninò sunt præmittenda primæ demonstrationi; alterum circa aggregata terminorum proportionalium, alterum de lineis

TAB. X. Fig. 3.

neis incommensurabilibus. Quamquàm enim primum ex Torricellii flexilineis, ejusve lemm. 28. de dimensione parabolæ, facilè deduci potest, secundum verò expressè à Cavalerio exercit. 6. prop. 24. demonstratum fuerit, malui tamen demonstrationes meas per extensum afferre, ne Lector, libris illis fortè ad manum non occurrentibus, in horum Theorematum demonstratione hæsitare possit, sed solis Euclideis, Conicisve ad summùm elementis instructus, absque alio subsidio, omnia inoffenso pede percurrat: quod & aliàs infra observabimus, semel hìc monuisse sufficiat.

2. Dico igitur primò, quòd, si fuerit duplex series quotcumque terminorum in eâdem ratione geometricè proportionalium, erit omnium aggregatum, minimo excepto, in prima serie, ad aggregatum, pariter minimo excepto, in serie secundâ; ut differentia maximi à minimo primæ ad differentiam maximi à minimo secundæ seriei. Sint enim magnitudines ejusmodi in prima serie A, B, C, D, E, quarum maxima A, minima E, utriusque differentia FG, differentiæ autem singularum per ordinem à proximè minori sint *a*, *b*, *c*, *d*, utique simul sumptæ æquales ipsi FG extremarum. Sint pariter secundæ seriei magnitudines M, N, P, Q, quarum maxima M, minima Q, utriusque differentia RO similiter æqualis omnibus simul partialibus differentiis duarum quarumlibet sibi succedentium, quas notant litteræ *m*, *n*, *p*; sintque in eâdem ratione continuè proportionales, tum quæ in prima serie, tum quæ in secunda reperiuntur. Dico, ABCD simul ad MNP, simul sumptas esse, ut FG ad RO; cùm enim sint A, B, C, D, E, continuè proportionales, erunt in eâdem ratione proportionales earumdem differentiæ *a*, *b*, *c*, *d*; atque ut una A ad unam *a*, ita omnes ABCD simul ad totidem *abcd* simul sumptas, ideſt ad ipsam FG iis omnibus

TAB. X. Fig. 1.

æqua-

æqualem: eâdem ratione oſtendetur, ut una M ad unam *m*, ita omnes MNP ad omnes *mnp*, ſive ad RO ipſis æqualem; eſt autem, ut A ad *a*, ita M ad *m*, quoniam ſupponitur eſſe A ad B, ut M ad N; igitur ut ABCD ad FG, ita MNP ad RO, & alternando, ut ſumma terminorum primæ ſeriei, excepto ultimo, ad ſummam terminorum poſterioris, ultimo pariter excepto, ita FG, differentia primi ab ultimo in prima ſerie, ad RO, differentiam primi ab ultimo in ſerie ſecunda. Q. e. d.

3. Dico ſecundò, duarum incommenſurabilium magnitudinum majorem poſſe minori commenſurabilem reddi, ablata magnitudine minori qualibet data. Sunto enim duæ ejuſmodi quantitates incommenſurabiles, AB major, & C minor, quælibet autem magnitudo propoſita AE, quantùmvis parva; dico, poſſe ex majori AB auferri quantitatem, puta AD, minorem aſſignata AE, ita ut reſiduum DB ſit jam ipſi C commenſurabile; nam biſariam diviſa C, ac rurſus ſubdiviſa qualibet ejus medietate, patet, fore ut jam deveniamus ad aliquam ejus partem F minorem, data magnitudine AE: multiplicetur itaque F, quouſque fiat proximè major ipſa BE, & aggregatum ex F toties accepta ſit BD, patet BD minorem fore ipſa BA, quia BD ad ſummùm ſuperabit EB quantitate F, juxta conſtructionem, minori quàm ſit AE, aut plerumque nec integra quantitate F, ſed ejus aliqua portione multò magis minori ipſa AE; itaque BD minor eſt, quàm BA, defectu AD minori, quàm ſit propoſita magnitudo AE; ſed & eadem BD ipſi C commenſurabilis eſt, habens cum ipſa menſuram communem F, ex qua pluries repetita conſurgit; igitur ex majori AB duarum incommenſurabilium magnitudinum facta eſt ablatio partis AD minoris, data quantitate AE, reſidua DB jam commenſurabili ipſi C remanente. Q. e. f.

TAB. XII. Fig. 8.

4. Jam

4. Jam libero pede Hugeniani Theorematis demonstrationem Archimedeo more sic instituo. Spatiorum ABCV, ABQD (quæ demonstranda sunt invicem esse, ut VE, DK) altitudines BC, BQ, vel commensurabiles sunt, vel incommensurabiles. Sint primùm commensurabiles, mensura B*x* utrique communiter inserviente, distributoque axe BC, & residuo CQ in particulas ipsi B*x* æquales, ac ductis ordinatis, fiant parallelogramma æquè alta B*z*, *xz*, &c. usque ad C*m* circumscripta spatio BCVA, quorum ultimum C*m* illi penitus extrinsecum remanet, continueturque eadem parallelogrammorum æquè altorum series per reliquum spatium CVDQ, cui pariter circumscripta sint C*m*, *nm*, &c. usque ad QO, quod toti spatio extrinsecum pariter erit: At si mensura B*x* non satis ad propositum exigua fuerit, poterit illa, & sequentes portiones ipsi æquales, bifariam dividi, ac rursus bifariam, multiplicatis parallelogrammis hæc spatia circumscribentibus, quòusque excedant eadem spatia minori excessu quolibet dato, siquidem ille excessus minor semper erit primo parallelogrammo B*z*, quod (diminutâ ejus latitudine) minus esse potest quavis proposita quantitate; erunt autem hæc parallelogramma æquè alta, ut bases, nempe ut ordinatæ in Logistica paribus intervallis dissitæ, adeoque erunt, ex primaria Logisticæ affectione *cap.* 1. *num.* 2. relata, in continua proportione, unde ex primo assumpto nostro *num.* 2. hîc probato, aggregatum omnium parallelogrammorum circumscriptorum spatio ABCV, præter minimum toti spatio extrinsecum C*m*, ad aggregatum omnium circumscriptorum spatio ADQB, excluso pariter minimo QO, erit ut differentia B*z* à C*m*, scilicet, ut *m*VE, ad differentiam ejusdem B*z* à QO, idest ad ODK, atque adeo, ut VE ad DK. Quoniam igitur series parallelogrammorum ejusmodi spatia TAB. XI. Fig. 8.

circumscribentium semper, quantacumque fuerit ipsorum multitudo, & quantumcumque accedant ad ipsamet spatia, inveniuntur esse in ratione constanti VE ad DK, patet utique Viris Archimedeis & ipsamet Logistica spatia iis parallelogrammorum seriebus inscripta, nempe AVCB, & ADQB, in eàdem esse ratione VE ad DK.

TAB. X. Fig. 3. 5. Sint jam altitudines BC, BQ incommensurabiles; poterit, ex secundo assumpto nostro *num.* 3. hìc demonstrato, sumi BN deficiens à BQ, quantitate NQ minori qualibet data, commensurabilis verò existens ipsi BC; quomodo, ordinata NMR, habebit spatium AVCB ad AMNB eamdem rationem, quam VE ad MR, argumento proximè allato id concludente. Si igitur major esse dicatur ratio AVCB ad ADQB, quàm ratio linearum VE, & DK, poterit ipsa MR tam proxima esse ipsi DK, & tam parum ab ipsa deficere, ut ratio dictorum spatiorum sit adhuc major, quàm ratio lineæ VE ad MR, hoc est, quàm ratio spatii primi AVCB ad AMNB, atque adeo foret ADQB minus quàm AMNB, quod est absurdum; si verò minor esse dicatur ratio dictorum spatiorum, quàm linearum illis, ut supra, respondentium, poterit nihilominus linea NM tam proxima esse ipsi QD, & spatium AMNB tam parum deficere ab ipso ADQB, ut ratio AVCB ad AMNB, hoc est, ratio VE ad MR adhuc minor sit, quàm ratio VE ad DK, atque adeo MR major foret ipsa DK, quod pariter est absurdum; Æqualis igitur est ratio AVCB ad ADQB, rationi VE ad DK. Q. e. d.

6. Aliam adhuc expeditiorem, fortasse ejusdem Theorematis demonstrationem, subjungemus, his aliis præmissis, quæ demonstrasse in sequentibus non pigebit: & primò notare juvat, duo quælibet spatia Logistica æquè alta, juxta indivisibilium methodum, ostendi esse

esse ad invicem, ut sunt Homologæ utriusque ordinatæ; nimirum pari existente altitudine BC, CQ, spatium BAVC ad CVQD erit, ut BA ad CV, vel CV ad QD; sumptâ enim ubivis Bx æquali Cn, & ordinatis xs, nr, & alternando, ut BA ad CV, ita xs ad nr; & hoc semper; ergo, ut una ad unam, ita omnes ad omnes, nempe ut BA ad CV, ita spatium BAVC ad CVDQ; quod erat, &c. Neque refert, sint ne hæc spatia conjuncta, sibique immediatè succedentia, an prorsus disjuncta, vel ex parte communicantia; eadem quippe ratio, ut constat, perinde obtinet. TAB. XI. Fig. 8.

7. Deinde observare oportet, spatia post quamlibet ordinatam in infinitum producta esse ad invicem, ut sunt ipsæ ordinatæ, seu bases talium spatiorum; sic DABQR, & DVCQR, ex parte R utrâque interminatâ, & infinitè longâ, sunt ad invicem, ut BA, & CV. Id sanè constat, tum quia infinita BQR, & infinita CQR sunt æquales, quum differant finitâ longitudine BC nullam rationem habente ad ipsarum utramlibet; quare, ex dictis numero præcedente, spatia iis adjacentia sunt, ut ordinatæ AB, CV; tum etiam exactius sic.

Diviso interminato spatio DABQR in infinita spatia æquè alta BV, CH, GD, &c. similiter & spatio DVCQR in infinita ejusdem altitudinis spatia CVHG, GHDQ, &c. erunt utrobique, ex supra demonstratis *in præcedenti numero*, spatia illa æquè alta, ut suæ ordinatæ, adeoque in geometrica progressione; omnes igitur termini BV, CH, &c. ad omnes CH, GD, &c. in infinitum continuatos, erunt, ut primus terminus BV ad primum CH, ex 12. v. elem. aut ex 29. lemmate Torricellii de dimensione parabolæ aliàs citato; adeoque erunt, ut BA ad CV. Quod e. d. TAB. X. Fig. 2.

 8. Hinc

8. Hinc ultro profluit tertium Cl. Auctoris Theorema, quòd spatium duabus ordinatis interjectum est ad infinitum spatium, quod post minorem illarum exporrigitur, ut differentia utriusque ordinatæ ad minorem ipsarum; quia enim DABQR ad DVCQR est, ut BA ad CV, igitur dividendo AVCB ad subsequens interminatum spatium post CV est, ut EV ad VC, & similiter ADQB ad interminatum spatium post QD est, ut KD ad DQ.

9. Alia igitur primi hujus Theorematis demonstratio sic instituenda erit; spatium ABCV ad interminatum VDRQC est, *ex num. præcedenti*, ut EV
TAB. XII. Fig. 8. ad VC; & VDRQC ad interminatum DRQ *ex num.* 7. est, ut VC ad QD; denique DRQ ad DVCQ *ex num. præced.* & convertendo est, ut QD ad DK; igitur ex æquo AVCB ad CVDQ est, ut VE ad DK. Q. e. &c.

CAPUT IV.

Ad secundum Hugenii Theorema demonstrandum, quæ sit Logisticæ parameter ostenditur, & quomodo æqualis sit subtangenti. Post demonstrationem secundi Theorematis ad quartum proceditur, quo demonstrato, determinatoque rectangulo æquali spatio Logisticæ infinitè longo, exponitur Auctoris circumspecta loquutio de ratione infiniti spatii ad finitum, ac familiaribus exemplis suadetur, infinitè longa spatia determinatæ quantitati æqualia esse posse. Spatia per variæ rationis ordinatas in Logistica abscissa quam proportionem habeant; regula ad dignoscendum quando spatia infinitè longa, aut infiniti termini finitam aggregent quantitatem, quando verò infinitam.

1. IN

1. IN secundo Theoremate; *Iisdem positis*, inquit Auctor, *& AO curvam tangente ad punctum A, quæ secet ipsas CE, QK in I, & G; spatia AVE, ADK sunt inter se, ut rectæ VI, DG.* Quod pariter ut demonstretur, determinanda prius est Logisticæ, ut ipse appellare soleo, *Parameter*; hæc autem ejusmodi est. TAB. X. Fig. 4.

2. Exponatur linea S, quæ cum quavis ordinata inter Logisticam, & axi parallelam, veluti cum VE, contineat rectangulum æquale spatio AVCB, adjacenti eidem curvæ ad partes axis; manifestum est, quòd eadem constans linea S continebit, cum quavis alia simili ordinata DK, rectangulum æquale spatio correspondenti ADQB; cùm enim ex primo Theoremate spatia VABC, DABQ sint, ut rectæ VE, DK, seu, ob communem altitudinem S, ut rectangulum ex S in VE ad aliud ex S in DK, ubi spatium VABC suppositum fuerit æquale rectangulo S in VE, spatium pariter DABQ æquale erit rectangulo ex eadem S in DK; itaque, non incommodè, linea S Logisticæ *Parameter* deinceps appellari poterit, eò quòd sit linea, juxta quam ipsæ VE, DK possunt spatia Logisticæ adjacentia AVCB, ADQB.

3. Ostendemus autem, hanc Parametrum Logisticæ subtangenti, id est, axis portioni inter ordinatam BA, & tangentem AO interceptæ, semper æqualem esse, ita ut, posita BO æquali ipsi S, juncta OA curvam tangat in A. Sumpto enim in OA quovis puncto I, supra, vel infra A, ordinatâque CIV, occurrente axi in C, curvæ in V, axi parallelæ AK in E, erit, ob similitudinem triangulorum OBA, IAE, ipsa OB ad BA, ut AE ad EI; rectangulum igitur OB in EI æquale erit rectangulo BAE; sed spatium BAVC est, *ex numero præcedenti*, æquale rectangulo Parametri, idest ipsius OB in VE;

 ergo

ergo rectangulum BAE ad spatium BAVC est, ut recta IE ad EV; puncto autem *i* supra A existente, manifestum est rectangulum BA*e* minus esse spatio BA*uc*, ergo tunc *ie* minor est, quàm *eu*; ob oppositam rationem, accepto puncto I infra ipsum A, erit rectangulum BAE majus spatio BAVC, unde & recta IE major ipsa EV; quare in utroque casu punctum I est extra curvam, & ipsa OA est tangens. Quod erat demonstrandum.

4. Hoc posito, demonstratio secundi Theorematis Hugeniani sic instituenda erit; cùm, ob similitudinem triangulorum OAB, GAK, sit OB ad BA, ut AK ad GK, erit rectangulum ex OB in GK æquale rectangulo BAKQ: sed OB in DK jam æquatur spatio ADQB, ex supradictis; igitur reliquum rectangulum ex OB in DG æquatur residuo spatio DAK. Similiter ostendetur, rectangulum ejusdem OB in VI æquari spatio AEV; igitur, ut prædicta rectangula, sive, ut eorum bases DG, VI, ita spatia ipsa DAK, VAE; quod erat demonstrandum.

5. De tertio Hugenii Theoremate, quod est; *Spatium duabus ordinatis interjectum esse ad spatium infinitum, quod post minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logisticam, & ejus Asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum est ad minorem; nempe in præcedenti figura spatium ABQD esse ad spatium infinitum, quod post minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logisticam, & ejus Asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum est ad minorem, id-est in præcedenti figura, spatium ABQD esse ad spatium infinitum, quod post QD inter curvam, & asymptoton interjicitur, ut KD ad DQ*; de hoc, inquam, Theoremate non est quòd simus solliciti, quum ejus veritas jam innotuerit ex dictis *cap. præced. num.* 8. ut nihil jam addendum supersit, nisi hoc quasi corollarium, scilicet.

6. Quòd

6. Quòd ſpatium infinitum poſt quamvis Logiſticæ ordinatam QD, curvæ & aſymptoto interjectum, æquale ſit rectangulo ſubtangentis, ſeu parametri BO in eamdem ordinatam; nam, ut DK ad DQ, ita rectangulum ex BO in DK ad rectangulum ex BO in DQ, & ita etiam ſpatium ADQB ad infinitum ſpatium poſt QD exporrectum; quare quum rectangulum ex BO in DK ſit, ex dictis, æquale ſpatio ADQB, etiam BO in DQ erit æquale ſpatio infinito poſt QD exporrecto.

7. Quæ verò circumſpectè ingerit Nobiliſſimus Auctor illis verbis: *Cùm porrò dicimus, infinitum ſpatium ad quoddam finitum in certa ratione eſſe, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum ſpatium, quod finito illi ſpatio in dicta proportione reſpondeat, ut differentia minor evadere poſſit qualibet magnitudine data.* Non ita accipienda ſunt, nec eò ſpectant certiſſimè, ut ſcrupulum movere videatur Cl. Author, num exacta æſtimanda ſit proportio, quam inter utrumque ſpatium aſſignat; ex quò enim Torricellius, infinitum ſolidum hyperbolicum in cylindrum æqualem determinatæ baſis, & altitudinis commutare Geometras docuit, necnon infinitorum proportionalium terminorum ſeries in unam ſummam colligere, jam extra dubium eſt, magnitudinem, unâ vel alterâ dimenſione infinitam, (putà multitudine, licèt non mole, ſi de quantitate diſcreta ſermo ſit, longitudine, licèt non latitudine, ſi de ſpatiis ſuperficialibus loquamur, aut longitudine, licèt non craſſitie, vel craſſitie quidem, ſed non longitudine, loquendo de ſolidis) ita reliquis dimenſionibus, ad abſolutam ejus magnitudinem integrandam concurrentibus, limitari poſſe, ut quantitatem prorſus finitam adæquet.

8. Neque in hoc relictum eſſe puto Geometris ambigendi locum, ut ut id Tyronibus prope incredibile videa-

videatur, qui admirationi, aut potius præjudicatæ, qua tenentur, opinioni paulatim deponendæ assuescent, si has fractionum series $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. in eadem ratione dupla decrescentes, aut $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, cæterasque decrescentes in ratione tripla, aliasve cujusvis rationis progressiones in infinitum minoribus, & minoribus terminis coalescentes in unam redigere summam attentaverint; cùmque experti fuerint, non posse tot sumi in prima serie, quæ umquam ad unitatem pertingant, eò quòd, in additione cujuslibet termini ad præcedentes, non additur quod ipsis deficit ad unitatem integrandam, sed semissis dumtaxat talis defectus, putà ad $\frac{1}{2}$ addendo $\frac{1}{4}$ additur semissis ejus, quod primo termino deficiebat ad unitatem, & alter semissis relinquitur, addendo autem duobus præcedentibus $\frac{1}{8}$, non additur quod in prima additione relictum fuerat, nempe quadrans unitatis, sed ejus quadrantis semissis, idest octans, altero octante relicto; qui defectus rursus non suppletur per sequentem additionem, quippe non additur octans relictus, sed ejus semissis, nempe $\frac{1}{16}$, atque ita porrò; nec posse tot sumi in serie secunda, quæ umquam unitatis semissem restituant; quia cùm primus terminus $\frac{1}{3}$ deficiat per semissem sui, idest per $\frac{1}{6}$, à semisse unitatis, non resarcit quis illum defectum addendo $\frac{1}{9}$, quippe qui deficiat ab $\frac{1}{6}$ rursus per sui semissem $\frac{1}{18}$, hic verò non suppletur additione sequentis termini $\frac{1}{27}$ deficientis ab illo residuo $\frac{1}{18}$ rursus per sui semissem, atque ita porrò semper procedendo; ita ut nihilominus ad hos limites, nempe ad unitatem in serie prima, & ad semissem unitatis in serie secunda, semper propius accedatur sumptis pluribus terminis ejusdem seriei, defectu semper decrescente infra quamlibet assignatam quantitatem, (veluti in figuris plurium & plurium laterum, circulo, aut parabolæ, alterive curvo spatio inscriptis, veterum more contingit) donec peni-

penitus in feriei fine evanefcat: cùm id, inquam, experti fuerint, atque attenta meditatione rei hujus naturam contemplaverint, fateantur neceffe erit, quòd fi prorfus omnes illi infiniti termini fimul acciperentur, præcisè forent in prima ferie æquales unitati, in fecunda ferie unitatis femiffi, in aliis alteri quantitati fimiliter determinandæ.

9. Utì autem in quantitate difcreta, ita in continua (quæ femper in difcretam dividi, & refolvi poteft) idem obtinet; fpatium quippe infinitè longum in fpatia determinatæ longitudinis multitudine infinita refolvi poteft, quæ poterunt femper minora, & minora esfe, fi latitudo proportionaliter decrefcere intelligatur, ita ut illa infinita fpatia per ordinem correfpondeant infinitis terminis alicujus geometricæ progreffionis, utì certè correfpondent fpatia Logiftica ad æquales axis portiones abfciffa, utì ex dictis *præced. cap. num.* 6. colligitur; omnia ergo hujufmodi æquè alta fpatia per infinitam Logifticæ longtiudinem diftributa, quum fint quædam feries geometrica proportionaliter decrefcentium terminorum in ratione, vel dupla, vel tripla, vel alia qualibet, prout extremæ ordinatæ cujuslibet æquè alti fpatii in data ratione acceptæ fuerint, determinatæ magnitudini æqualia effe, prout in fractionibus contingit, nil prorsus repugnat, immò vel ex hoc ipfo, quod in fractionibus oftendimus, evidentiffimè ita debere contingere demonftratur; idemque fimiliter de fpatiis aliis infinitè longis, de quibus paffim Geometræ, & nos infra nonnulla dicturi fumus, abfque fcrupulo pronunciandum, quòd fcilicet determinatæ magnitudini æqualia fint, dummodo tota prorfus accipi intelligantur, nulla ipforum portione relicta; quod quia conceptu difficillimum eft, quum infiniti natura refpuat, nedum ut totum integrè defignari queat, fed etiam ut imaginatione comprehendi valeat, ita ut,

poſt quamlibet partem, non aliam, & aliam ejus extenſionem cogitemus, quippe cujus ultimum limitem non concipimus; ideo prudens Auctor cautè addidit: *Spatia illa, non tam abſolutè infinita, quàm juxta illam dimenſionem interminata, ad datam cum ſpatio finito proportionem tam prope accedere, ut diſtare poſſint defectu minori quolibet dato, quamdiu ſcilicet illud ſpatium indeterminatè ſumitur, ut longiùs, ac longiùs protenſum, nec totum ſemel integrè accipi intelligitur, aut ſaltem accipi fingitur.*

10. Mirum autem nemini videatur, quòd idem ſpatium Logiſticæ infinitè longum in ſpatia cujuslibet progreſſionis, nempe terminorum in ratione dupla, tripla, quadrupla, ſeſquialtera &c. decreſcentium, in infinitum diſtribui poſſit, pro varia portionum axis altitudine, quum tamen progreſſiones diverſarum rationum non ejuſdem ſint valoris, ſed progreſſio dupla æqualis unitati, tripla ſemiſſi unitatis, quadrupla trienti, &c. non enim eadem eſt quantitas, quæ locum unitatis obtinet diviſo Logiſticæ ſpatio in terminos rationis duplæ, ac quæ eamdem unitatem repræſentat, cùm dividitur in terminos rationis triplæ, aut quadruplæ; ſiquidem in primo caſu unitas eſt duplum primi ſpatii, in ſecundo triplum ſpatii primi, in tertio quadruplum, &c. quæ ſunt quantitates longè diverſiſſimæ; interea hinc habetur, eamdem magnitudinem eſſe duplam ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione dupla, dimidiam tripli, hoc eſt ſeſquialteram, ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione tripla, trientem quadrupli, hoc eſt ſeſquitertiam ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione quadrupla, atque ita deinceps, eâdem exiſtente omnium horum ſpatiorum majori ordinata, ſingulis pro communi rationis antecedente inſerviente; adeoque ſi totum Logiſticæ infinitum ſpatium ponatur eſſe partium 12., ſpatium primum, cujus ordinatæ

natæ ſint in ratione dupla, erit partium 6, & cujus ordinatæ in ratione tripla, partium 8, & cujus in ratione quadrupla, partium 9, ac ſimiliter de aliarum rationum ſpatiis ratiocinari licebit; id quod tamen ex primo etiam Auctoris Theoremate facilè deduci poteſt.

11. Neſcio autem, an obiter, dum ferrum candet, exponere generalem regulam juvet, qua dignoſci poſſit, quando ſpatia infinitè longa, vel termini multitudine infiniti, etiam cùm decreſcunt, quantitatem abſolutè infinitam adæquent, & quando prorſus finitam, ac terminatam. Eam certè ante plures annos, quum Theologicis ſtudiis adoleſcentes noſtros imbuerem, in quadam Appendice ad Tractatum de Viſione Dei, talem proferebam. Quoniam, ut innui in notatione Præfationis Vivianeorum Problematum *pag.* 27, duarum quantitatum ratio componitur ex rationibus ſingularum dimenſionum illis quantitatibus competentium, & invicem comparatarum, expendendum eſt, num ratio ex his compoſita ſit ratio finita, nec ne. Jam, aggregatum plurium terminorum, quatenus quædam diſcreta quantitas eſt, unam tamen continuam magnitudinem, & quantitatem integrans, duas habet dimenſiones, quippe ex duplici capite quantitas ex hiſce terminis aggregata creſcere, & major fieri poteſt, nimirum ex terminorum *multitudine*, & ex propria ſingulorum *quantitate*; quò plures enim termini adunantur, eò major, cæteris paribus, quantitas conſurgit, puta, quò plures fractiones in unam ſummam colliguntur, eò major ſumma conficitur; & ſtante aliàs pari terminorum multitudine, quò *majores* in ſe ipſis ſinguli fuerint, eò pariter major magnitudo colligitur; ſic tres fractiones decimales majorem ſummam conficiunt, quàm tres milleſimæ, aut centeſimæ; ut ergo videamus, num propoſitis quibuslibet infinitis

terminis, ii quantitatem infinitam aggregent, an tantùm finitam, obſervandum eſt, an creſcente arithmeticè in infinitum ipſorum multitudine, decreſcat pari ratione, aut majori, vel minori ipſorum quantitas; ſi in eâdem ratione decreſcat, ut in 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, &c. ubi ſecundus terminus eſt ſemiſſis primi, tertius triens ejuſdem, quartus ejus quadrans, &c. prout multitudo duorum eſt dupla unius, trium eſt tripla, quatuor quadrupla, &c. procul dubio quantitas omnium ſimul infinita erit, quia cùm terminorum multitudo ſic æquipolleat ipſorum abbreviationi, ſeu parvitati, ratio quantitatis talium terminorum ad aliam aſſignabilem quantitatem, puta ad unitatem, utpotè compoſita ex ratione multitudinis, & parvitatis eorumdem terminorum reſpectu dictæ unitatis, (altera ratione alteram elidente) erit ratio infinita, & ipſorum terminorum quantitas æquipollebit quantitati infinitorum terminorum invicem æqualium, quæ certiſſimè infinita eſt. At ſi in majori ratione termini decreſcant, ut accidit in ſeriebus *numero* 8. adductis, quæ geometricè decreſcunt, creſcente terminorum multitudine arithmeticè, (atque in aliis bene multis, quæ etſi non geometricè, omnibus tamen compenſatis in majori ratione decreſcunt, quàm creſcat ipſarum multitudo) tunc, præpollente parvitate ſingulorum terminorum eorumdem multitudinis incremento, prodibit, ex utriuſque compoſitione, finita ratio, & aggregabitur quantitas prorſus finita; quando autem in minori ratione decreſcant termini, quàm illorum pluralitas augeatur, ratio pluſquam infinita exinde conſurget, ſeu à fortiori, quàm in primo caſu, dicendum erit, omnium aggregatum quantitatis eſſe ſimpliciter, ut ajunt, infinitæ, præpollente multitudinis incremento ipſorum abbreviationi terminorum.

12. Idem applica ſuperficiebus, aut ſolidis, quorum una,

una, aut altera dimensio infinita sit, altera tamen, aut reliquis continuè diminutis; prout enim in majori, aut eàdem, minorive ratione minuetur altera dimensio, quàm crescat ea, quæ in infinitum extenditur, judicandum erit spatium illud præcisè finitum esse, aut infinitum, vel plusquàm (si dicere liceat) infinitum. Hinc Cl. Wallisius in Arithmetica Infinitorum optimè observat, spatium hyperbolæ, & asymptoto interjectum, cujus latitudo in eadem ratione minuitur, in qua longitudo asymptoti crescit, (propter latera parallelogrammorum æqualium ejusmodi spatio inscriptorum necessariò reciproca) esse idcirco infinitæ prorsus magnitudinis; in hyperbolis autem aliorum graduum, ex una quidem parte finitum esse, ubi in majori ratione decrescunt lineæ ad asymptoton ordinatæ, atque adeo latitudo ejusdem spatii, ex altera autem parte, idest ad aliam asymptoton, plusquam infinitum existimandum, eò quòd in minori ratione ordinatæ decrescant; id quod in aliis etiam spatiis, tum solidis, tum superficialibus observari potest.

CAPUT V.

Quartum Hugenii Theorema, pridem demonstratum, nova demonstratione per diversam methodum stabilitur. Tractoriæ proprietas hinc deducta, quòd ordinatæ ad æquales curvæ partes sint invicem proportionales. Cuilibet curvæ tangentem ducere. Velocitates in diversis curvæ punctis sunt, ut facta ex ordinatis in subtangentes alternè sumptas. In Hyperbola sunt, ut quadrata temporum contrariè sumptorum. Determinatio tangentium ad infinitas parabolas. Eadem expeditior. In aliis curvis quomodo tentanda. Variarum ad id constructionum demonstratio. Subtangens curvarum, quæ ad modum Spiralium describuntur.

buntur. Infinitæ Spiralium ſpeties, quas ſubtangentes habeant, & quomodo infinitis parabolis reſpondeant. Tangens Spiralis Geometricæ, & quarumvis figurarum per alterius convolutionem genitarum. Tangens Conchoidis Nicomedeæ, aliis infinitis Conchoidibus & Subconchoidibus applicabili methodo, oſtenſa. Eadem geometrica demonſtratione confirmata. Tertia demonſtratio quarti Theorematis Hugeniani. Curva parabolica Logiſticæ ſemper perpendicularis.

1. QUartum Auctoris Theorema; *Quòd ſubtangens, ut BO in eadem figura, ejuſdem ſemper eſt longitudinis, ad quodvis Logiſticæ punctum tangens pertineat*, alia demonſtratione non indiget, quum probatum fuerit *Cap.* 4. *num.* 3. ſubtangentem æqualem ſemper eſſe Parametro hujus curvæ, quæ linea quædam conſtans, & definita eſt; verùm ad pleniorem ſcientiam id aliter, atque aliter demonſtrabimus, diverſa methodo, eaque ad alias longè veritates applicabili.

TAB. XII. Fig. 7. 2. Secunda igitur hujus Theorematis demonſtratio ſic inſtitui poterit. Sint quælibet ad axem Logiſticæ ordinatæ AB, VC, tangentes ad eadem puncta AO, VQ. Dico interceptas ordinatis, & tangentibus, BO, CQ (quæ ſubtangentes appellantur) æquales eſſe. Sumatur quantumvis parva BE, illique æqualis CG, ut ordinatis ED, GF portio tangentis AD ferè cum curva AD, & portio tangentis VF ferè cum curva VF coincidere cenſeri poſſit, ob infinitè parvum intervallum utrivis ordinatarum pari interjectum; erit igitur ex natura curvæ, in qua ſunt puncta D, F, ipſa AB ad ED, ut CV ad GF, juxta primariam Logiſticæ affectionem; rurſus cùm puncta D, F ſupponantur & in tangentibus eſſe, erit AB quidem ad ED, ut BO ad OE; CV verò ad GF, ut CQ ad QG; ergo eadem erit ratio

BO

BO ad OE, quæ CQ ad QG, & per conversionem rationis, eadem ratio BO ad BE, quæ QC ad CG; suntque consequentia æqualia; igitur & antecedentia BO, CQ æqualia erunt. Q. e. d.

Poterat rigorosiùs argui per deductionem ad absurdum; sed quorsum ita? Observa potius quid evenisset, si natura curvæ ea foret, ut sumptis non in axe, sed in ipsa curva æqualibus portionibus AD, VF, eædem ordinatæ proportionales essent; An non enim eodem argumento constaret, OA ad AD esse, ut QV ad VF? unde consequentibus æqualibus existentibus, etiam antecedentia, scilicet, tangentes ipsas AO, VQ ubilibet æquales futuras, adeoque ejusmodi curvam illam ipsam fore, quam *Tractoriam* vocant? eam scilicet, quam describeret grave A funi AO alligatum, dum funis extremum O per rectam OQ trahitur in eodem horizontali plano; pondus siquidem perfectè sequetur ejusdem funis directionem, adeoque ejus viæ tangens erit perpetuò eadem funis longitudo: quamquam hoc generale est, ut cùm relatio ordinatarum ad axem mutatur in relationem ordinatarum ad curvam, eadem expressio subtangentis transeat ad ipsam tangentem, ut pluribus exemplis confirmare in promptu esset.

3. Utilius erit Tertiæ demonstrationi ejusdem Theorematis viam sternere generali quodam lemmate circa tangentium inventionem præmisso, quod ex Torricellii doctrina obiter indicata in l. 1. de mot. gr. prop. 18. ejusque Scholio, in hunc modum deduxi; sicque universaliter proponere statui. *Ad datum cujuslibet curvæ punctum tangentem ducere.* Datum sit punctum A curvæ cujuslibet DAV, cujus axis BC, ordinata ex data puncto AB concipiatur hæc curva descripta motu ordinatæ BA per axem BC æquabiliter fluentis, sibique æquidistanter delatæ, & ex motu puncti TAB. X Fig. 4. 5.

A

A versùs B accedentis, vel ab eodem in ipsa linea recedentis, non jam æquabiliter (sic enim recta linea, non curva describeretur) sed velocitate accelerata, aut retardata, prout opus ad eam curvam generandam. (quælibet certè curva hoc modo genita intelligi potest) Fiat igitur, ut velocitas, quam punctum fluens habet in situ A ad velocitatem ordinatæ æquabiliter delatæ, ita ipsa ordinata AB ad portionem axis BO, acceptam versùs eas partes, ad quas motus acceleratur, si curvæ cavitas axem respiciat, ad quas verò retardatur si curva axi convexitatem obvertat: Dico junctam OA esse tangentem. Sumatur enim in ipsa OA, ad partes accelerationis punctum *i*, ad partes verò retardationis punctum I, ordineturque *cui*, CVI occurrens axi in *c*, C, curvæ in *u*, V, axi parallelæ AE per A ductæ in *e*, E. Quoniam velocitas puncti A per AB fluentis ad velocitatem lineæ AB per axem delatæ, est, ut AB ad BO, seu IE ad EA, aut *ie* ad *e*A, manifestum est, quòd si motus puncti A non acceleraretur, aut retardaretur, fieret per ipsam AI, seu A*i*, ita ut quo tempore ordinata descenderet, aut ascenderet per BC, seu AE, aut B*c*, seu A*e*, punctum A percurreret partem EI, seu *ei*, repereireturque in I, vel *i*. Verùm, quoniam motus puncti A curvam describentis interea acceleratur versùs *u*, & versùs contrariam partem V retardatur, ita ut velocitas ipsius A in A major sit, quàm in V, quia versùs eas partes remittitur, minor autem, quàm in *u*, quum versùs eas partes invalescat; ideo quo tempore ordinata venerit in CE, punctum A curvam generans minorem ordinatæ portionem EV confecerit, quàm confecisset si pristinam velocitatem retinuisset; minor est igitur EV, quàm EI; cùm verò ordinata venerit in *ce*, punctum A curvam generans majorem ejusdem ordinatæ tractum *eu* pertransierit, quàm si pristinæ velocitati

locitati nullos accelerationis gradus addidiſſet; major eſt igitur *eu*, quàm *ei*; & ideò puncta I, *i* ſunt utrobique ultra, & extra curvam, quare ipſa OA tangit. Quod erat demonſtrandum.

Obſervare hinc juvat, velocitates puncti non æquabiliter fluentis, veluti in figura DAB ad axem CV comparata, in punctis D, A, eſſe ad invicem, ut facta ex ordinatis in ſubtangentes alternatim ſumptas, putà, exiſtentibus tangentibus DP, AV, ordinatiſque DE, AF, ut factum ex DE in FV ad factum ex AF in EP; nam velocitas puncti fluentis in D ad ſimilem velocitatem in A rationem compoſitam habet ex velocitate talis puncti in D ad æquabilem velocitatem lineæ deſcendentis, & ex hac ipſa velocitate ad velocitatem puncti ejuſdem in A; ſed prima ratio, ex hoc Theoremate, eadem eſt, quæ DE ad EP, ſecunda verò eadem, quæ VF ad FA; igitur ratio velocitatis puncti fluentis in D ad velocitatem ejuſdem in A componitur ex DE ad EP, & ex VF ad FA, ideſt eadem eſt, quæ facti ex DE in FV, ad factum ex AF in EP. TAB. XIV. Fig. 2.

Unde adhuc colligitur, in Hyperbola Apolloniana DAB, cujus aſymptoti SC, CV, velocitates puncti fluentis in quibuslibet punctis D, A eſſe in duplicata ratione temporum contrariè ſumptorum; ſpatia enim æquabili motu lineæ per axem CV delatæ tranſacta, velut CE, CF ſunt, ut tempora; ſubtangentes autem EP, FV ſunt ipſis EC, FC diſtantiis à centro æquales; ergo eædem ſubtangentes pariter ſunt, ut EC, FC, ſeu ut FA, ED; ratio igitur facti ex DE in FV, & ex AF in EP, erit eadem, quæ facti ex DE in FC, & ex AF in EC ideſt compoſita ex DE ad AF, & ex FC ad CE, quæ eadem eſt priori, unde cum illa componit duplicatam rationem FC ad CE, quæ proinde duplicata erit temporum contrariè ſumptorum,

ſicut & homologarum ordinatarum DE, AF; & hoc erat demonſtrandum.

TAB. XV. Fig. 6. 4. Hinc tangentes omnium in primis parabolarum determinationem accipiunt; quemadmodum ſi C *a* A fuerit parabola quadratica, quæ æquabili motu ipſius CN per CΦ ſibi æquidiſtanter delatæ, ac deſcenſu naturaliter accelerato, ideſt ſingulis æqualibus temporibus novum ſibi celeritatis augmentum ſuperaddente, puncti C versùs N per lineam fluentem demiſſo deſcribitur, contingit, ordinata ex foco *n* ipſa *na*, celeritatem puncti deſcendentis in quolibet curvæ puncto A ad æquabilem celeritatem ipſius lineæ delatæ ſemper eſſe, ut ordinata ex dicto puncto AN ad prædictam ordinatam ex foco *na*, juxta citatam prop. Torricellii; eò quòd, cùm velocitates deſcenſuum creſcant, ut tempora, atque adeò ut ſpatia motus æquabilis, ideſt ut ΦC, *f*C, ſeu AN, *an*, quas linea NC æquabiliter tranſilit, ſi velocitas deſcenſus in A ſit ut AN, velocitas in *a* erit ut *an*; velocitas autem deſcenſus in *a* eſt æqualis velocitati motus æquabilis, quia ordinata ex foco *an* dupla eſt abſciſſæ *cn*, eadem verò eſt celeritas, quæ motu in hac ratione accelerato acquiritur deſcenſu per C*n*, & qua æquabiliter perſeverante conficitur duplum ſpatium *na*, igitur ſi velocitas in A ſit AN, velocitas motus æquabilis erit eadem quæ deſcenſus in *a*, ideſt erit, ut *na*: quemadmodum igitur hoc in quadratica obtinet, ita in cubica, ubi celeritates deſcenſuum creſcunt in duplicata ratione temporum, ideoque ſunt, ut quadrata ſpatiorum motus æquabilis, ſcilicet AN, *an*, comparando deſcenſum in A ad deſcenſum in *a* (facta priùs *an* tripla abſciſſæ C*n*, quia hoc accelerationis genere velocitas per C*n* deſcendendo acquiſita, triplo ſpatio *an* percurrendo par eſt, ſi æquabiliter permanere intelligatur,

gatur, unde similiter velocitas descensus in *a* æqualis erit velocitati æquabili lineæ) habebitur, velocitatem descensus in quovis puncto A esse ad æquabilem illam lineæ delatæ velocitatem, ut quadratum AN ad constans quadratum *an*; simili ratione in parabola quadrato-quadratica erit velocitas descensus in A ad illam æquabilem velocitatem, ut cubus AN ad *an* positam quadruplam ipsius *n*C abscissæ, atque ita deinceps in aliis gradibus, facta ordinata *an* tam multiplici abscissæ C*n*, quàm multiplex est unitatis exponens ordinatarum.

5. Quamquam vix operæ pretium fuerit iis velocitatibus comparandis insistere in parabolarum genere, ubi semel constiterit in quonam puncto velocitas æquabilis motus adæquet celeritatem descensivam, invento scilicet semel puncto *a*, ubi ordinata *an* æqualis est subtangenti *nb* (quod quidem evenit ubi *an* ad *n*C est, ut exponens gradus parabolæ ad unitatem, scilicet in quadratica, ut 2 ad 1; in cubica, ut 3 ad 1. &c) quia enim curvæ parabolicæ simili in singulis suis partibus accelerationis genere describuntur, ita continuè ordinato, ut spatia curvilinea ad circumscriptum parallelogrammum æqualem semper rationem obtineant, etiam in his eadem semper erit ratio subtangentis *bn* ad abscissam *n*C, vel spatii C*f* ad interceptam à tangente *fd*; undè cùm notum fuerit *an*, seu *bn* ad *n*C duplam esse in quadratica, triplam in cubica parabola, &c. etiam BN ad NC in eadem semper ratione esse manifestum erit, quare expeditius dabitur tangens ad quodlibet punctum A.

Similiter & in Hyperbolis, quarum pariter uniformis est ubique acceleratio, undè & parallelogrammorum quibuslibet spatiis inscriptorum eadem semper est ad infinitè longa spatia iisdem basibus insistentia proportio, subtangentes ad distantias à centro eamdem

perpetuò rationem obſervabunt. Invento itaque in Hyperbola $A a C$ ad aſymptoton fD, Db puncto a, ubi ſubtangens æquatur ordinatæ, ideſt, ubi velocitas motus æquabilis deſcenſivam adæquat (quod quidem evenit, ubi an ad nD eſt, ut exponens gradus Hyperbolæ ad unitatem, ſcilicet in lineari, ſeu Apolloniana, ut 1. ad 1.; in quadratica, ut 2 ad 1.; in cubica, ut 3 ad 1. &c. prorſus ut in Parabolis contingit, ſimili enim cum illis motu deſcribuntur, ſed dumtaxat reciprocè poſito, undè evenit ſubtangentes cadere ad partes oppoſitas axis origini, ideſt ſub ipſis ordinatis) cùm conſtiterit ſubtangentem inventi puncti a, nempe bn eſſe æqualem in prima, duplam in ſecunda, triplam in tertia Hyperbola diſtantiæ à centro nD, notum ſimiliter erit, etiam quamlibet aliam ſubtangentem BN in eadem eſſe ratione ad diſtantiam ND ſuæ ordinatæ NA ab eodem centro.

TAB. XI. Fig. 9.

6. Difficilior eſt aliarum figurarum tractatio, in quibus non uſque adeò perſpecta occurret ad ſingula puncta velocitatum in curvæ geneſim conſpirantium proportio; generaliter tantùm dici poſſet, velocitates deſcenſivas ad ſingula curvæ puncta eſſe ad invicem, ut ſpatia ſynchronis quibuſcumque temporibus peracta, ſive ut differentiæ æquè diſtantium ordinatarum intervallo infinitè parvo diſſitarum, ſeu ſi concipiatur ad axem $Cf\phi$ curvæ cujuslibet $C a A$ applicata figura $\phi G g C$, cujus portiones à vertice abſciſſæ per ordinatas, veluti gCf, $GC\phi$ ſint ad invicem, ut ordinatæ ad priorem curvam fa, ϕA, quo fiet lineas ipſas fg, ϕG, utpote minimas, & infinitè parvas differentias duorum ex talibus ſpatiis à vertice abſciſſorum, optimè repræſentare infinitè parvas differentias ordinatarum fa, ϕA, quibus dicta ſpatia proportionantur, adeòque etiam exprimere gradus velocitatum motus deſcenſivi, ita ut ſi talis celeritas in a ſit, ut fg, in

TAB. XV. Fig. 6.

A futura sit, ut ΦG; & si reperiatur in curva tale punctum *a*, cujus ordinata *af* ad abscissam *f*C in eadem sit ratione, in qua spatium *fg*C ad parallelogrammum illi circumscriptum *fgb*C, habebitur in *a* puncto velocitas descensiva æqualis celeritati transversi motus æquabilis, adeòque hæc velocitas æquabilis optimè exprimetur per *fg*, cæteris descensivi motus celeritatibus per alias parallelas, ut supra, determinatis; & si fiat, ut parallelogrammum circumscriptum cuivis spatio CGΦ ad ipsummet spatium, ita BN ad NC, aut CΦ ad Φ*f*, juncta AB, seu A*f*, erit tangens; similiter si fiat ut rectangulum AΦG ad spatium ΦGC, ita AΦ ad Φ*f*, aut si ad rectam ΦG applicetur spatium ΦGC, & faciat latitudinem Φ*f*, juncta A*f* tanget, quorum unum vel alterum juxta variam curvæ naturam, ejusve genesim, præsertim si ab initio figura CGΦ determinata fuerit (ut si quæratur de curva C*a*A genita ex transversali æquabili motu lineæ CN per datam CΦ, & descensivo puncti C per totam CN, ita accelerato, ut in quovis puncto *a* gradus ejus celeritatis proportionetur ordinatæ *fg* dati trilinei, alteriusve figuræ CGΦ datæ, & ad datam lineam CΦ applicatæ) aut aliquid cum his connexum facilè innotescet, ac tangens expeditè determinabitur.

7. Quorum omnium ratio, quamquam sufficienter in demonstratione *num.* 3. allata contineatur, breviter indicari poterit sic. Tangens ad aliquod curvæ punctum illa recta est, quam descripsisset, & describere pergeret punctum descendens, si gradum velocitatis, quem in dato curvæ puncto obtinet, æquabiliter retinuisset, transversali lineæ motu eodem remanente; ex eo enim, quòd, remota acceleratione, motus puncti A, in *fig.* 4. *Tab.* X. fieret per AI, ostensum est AI tangentem esse; at si fiat (*Tab.* XV. *fig.* 6.) BN ad NC, ut parallelogrammum BGΦC ad figuram CGΦ, juncta BA erit

via, cui insisteret punctum descendens, modò gradum celeritatis suæ ΦG toto tempore CΦ retinuisset (confecisset enim spatium BN, quod ad NC acceleratè percursum foret, ut planum velocitatis æquabilis ΦGBC ad planum acceleratæ ΦGgC, spatium verò transversali motu emensum esset eadem NA) igitur juncta in tali constructione AB erit tangens; cùmque & CΦ ad Φf sit in eadem ratione BA ad Af, seu BN ad NC; necnon AΦ ad Φf rationem habeat compositam ex AΦ ad ΦC, seu rectanguli AΦG ad CΦG, & ex ipsa CΦ ad Φf, quam vidimus esse, ut rectangulum CΦG ad spatium GCΦ; itemque cùm CΦ ad Φf sit, ut rectangulum CΦG ad fΦG; igitur si fiat CΦ ad Φf, ut parallelogrammum circumscriptum spatio ΦGC ad idem spatium, aut AΦ ad Φf, ut rectangulum AΦG ad idem spatium, aut applicetur ipsi ΦG dictum spatium, & faciat latitudinem Φf, semper juncta Af erit tangens; sed quorsum plura? præcipuæ ex his constructionibus, unde cæteræ pendent, geometricam confirmationem (si abstracta hæc motuum consideratio obscurior, aut minùs tuta videatur) habebis infra, *cap.* 13. *num.* 2.

8. Eadem ferè applicari possunt aliis curvis ex circulari, & progressivo motu descriptis, quemadmodum infinitæ Spiralium species, Conchoides diversorum generum, Cycloides anomalæ P. Cevæ, & aliæ quamplurimæ [imò quid vetet, ubi commodum acciderit, figuram prorsus omnem ejusmodi motibus compositam concipere, electo intra, aut extra ipsam quovis puncto, velut circularis motus centro, undè protensi ad curvam rami radiorum elongationem, pro vario progressivi motus puncti per ipsos fluentis incremento, exhibeant?] illud tamen in his observandum, quòd sicuti *cap.* 1. *num.* 12. ad genesim Spiralis Geometricæ per convolutionem Logisticæ, totus ejus axis in punctum contrahebatur, ordinatis ad æquales axis portiones

tiones in totidem ramos æqualibus angulis divaricatos abeuntibus, ita ad rem nostram æquabilis motus lineæ per axem delatæ in circularem circa centrum commutandus est, descensus verò puncti, aut progressus per ordinatas, debet in progressum puncti per curvæ ramos, seu radios figuræ converti; atque ut velocitas progressivi motus ad circularem, ita ipse ramus, seu radius spiralis, alteriusve figuræ præfato modo descriptæ, ad portionem lineæ ex centro perpendiculariter ad eumdem radium insistentis, utpote parallelæ tangenti arcus per circularem motum descripti, in qua est ipsius directio; hoc insuper animadverso, quòd circularis ille motus æquabilis eodem velocitatis gradu minimè pollet in singnlis curvæ punctis, sed pro varia puncti curvæ à centro distantia variatur, ut per se notum est, quippe non in eadem peripheria ALN, verbi gratia, sumitur circularis motus TAB. puncti *a* spiralis C*a*A, in qua sumitur circulatio pun- XV. cti A, ille quippe sumendus in peripheria *a*I radio Fig. 3. C*a* descripta, quem solum motum participat spiralis in puncto *a*.

9. Atque inde est, quòd subtangens quidem puncti A in spirali Archimedea post integram revolutionem radii CA æqualis est peripheriæ ALNA eodem radio descriptæ (existente siquidem hìc utroque motu æquabili, ipsorum velocitates sunt, ut spatia eodem tempore percursa, ut si velocitas progressivi motus sit CA, velocitas circularis sit ipsa CB subtangens æqualis peripheriæ eodem tempore percursæ) at verò subtangens *bc* puncti alterius *a* eadem non erit, ac quæ ad dictam peripheriam sit, ut C*a* ad CA, ut æquabilitas motus exigeret, sed velocitate progressivi motus expressa per C*a*, velocitas motus circularis erit tantò adhuc minor, quantò propius centro est punctum *a*, idest, ut arcus I*da*, quem eò usque linea C*a*

C*a* illo puncto descripsit, & cui propterea subtangens *cb* æqualis erit; itaque decrescunt subtangentes in duplicata radiorum ratione, quia semel ob diminutionem radii, & semel adhuc ob pariformem diminutionem circularis velocitatis, atque adeò vertice C descripta parabola CLK, ductisque AK, IL ejus axi parallelis, erunt hæ ad invicem, ut subtangentes radiis helicis CA, & C*a* (æqualis CI) respondentes; quòd si Spiralis ejus generis fuerit, ut spatia AC, *a*C motu progressivo percursa sint in subduplicata temporum, aut arcuum circulari motu æquabiliter percursorum ratione, manifestum est progressivam celeritatem puncti A, vel *a* subduplam fore ejus, quæ fuerat in prima Spirali, & exponendam per semissem radiorum CA, vel C*a*, si eadem retineatur linea exponens celeritatem æquabilis circulationis, aut si illa exponenda sit per integras lineas CA, C*a*, æquabilem celeritatem exponendam fore per priorum subtangentium duplas; erit igitur in hoc casu subtangens CB dupla circumferentiæ ALDA, & subtangens C*b* dupla arcus *ad*I, qui ex tribus capitibus minor erit illa circumferentia, nempe in duplicata radiorum ratione, & in earumdem simplici adhuc decremento ob approximationem centri, unde parabola cubica CLK descripta, in qua axi parallelæ KA, LI sint in triplicata radiorum AC, CI ratione, sive ut eorumdem cubi, erunt ipsæ axi parallelæ, ut subtangentes ad correlativa curvæ spiralis puncta; similiter in aliis Spiralium speciebus, ac parabolis per ordinem correspondentibus procedere potes; quod innuisse juvabit ad comparandas Spirales curvas cum congruis curvis parabolicis, utì aliàs facturi sumus, ostendendo, quòd si AK sit æqualis $\frac{1}{2}$ circumferentiæ ALD in prima Spirali, aut $\frac{1}{3}$ ejusdem in secunda, aut $\frac{1}{4}$ in tertia, $\frac{1}{5}$ in quarta, &c. prima parabola existente quadratica, secun-

secunda cubica, tertia quadratoquadratica, &c. Lineæ, spiralis, & parabolica æquales erunt; Immò etsi motus circularis & ipse æquabilis non fuerit, sed acceleratus, congruæ parabolæ nihilominus reperientur earumdem nempe potestatum in axe, & ordinatis, quot fuerint in respondentis Spiralis circumferentia, & radio, sed ordinatis parabolæ ad tantò plures gradus elevatis, quot fuerint unitates in exponente potestatum axis; neque enim difficilior est subtangentium & ad has Spirales determinatio, faciendo semper, ut velocitas progressiva ad circularem, ita A C, vel *a*C ad subtangentem C B, aut C*b* ex centro perpendiculariter ductam ad suum radium, uti pluribus explicare superfluum est.

10. In Spirali Geometrica, quoniam ex dictis *cap.* 1. *n.* 12. illa per convolutionem Logisticæ describitur ad maximum radium C A, posita CB subtangente æquali subtangenti ejusdem Logisticæ, quæ convolvitur, aliæ subtangentes C*b* tantò minores primâ C B faciendæ sunt, quantò minor est C*a* ob rationem in fine *num.* 8. indicatam, quia in ipsa evoluta Logistica subtangens cujusvis ordinatæ semper eadem est, ut supra ostendimus, & mox post illustratam hanc methodum ostensuri sumus; atque inde est, quòd triangula C A B, C*ab* semper similia sunt, angulique à radiis, & tangentibus æquales, totaque curva A*a*C æqualis tangenti A B, & *aa*C tangenti *ab*, &c. immò universaliter, si curva quælibet convolvi in Spiralem intelligatur eo modo, quo de Logistica citato loco exposuimus, subtangentes radiorum quorumlibet Spiralis erunt tantò minores, quàm forent subtangentes respondentium æqualium ordinatarum evolutæ, quantò propiora centro sunt puncta extrema dictorum radiorum, quàm punctum extremum maximi radii, quo vides nedum Helicis Archimedeæ, aliarumque diversorum graduum, per convolutiones, trianguli, parabolæque, quadraticæ, cubicæ, TAB. XV. Fig. 8.

bicæ, &c. genitarum, tangentes determinari cohærenter ad dicta numero superiori, sed infinitarum prope aliarum Spiralium, quæ ex quavis figura sic convoluta oriri possunt.

11. Non rarò autem juvabit duorum in eodem radio punctorum motum invicem comparare, quorum alter cognitus sit, alter certam ad illum proportionem obtineat: exemplo res clarior fiet. Esto Nicomedea Conchois A*a*B, polo P, regula FH descripta, intervallo AF, cui æqualis supponatur GP radius circuli G*g*M, & quæratur tangens puncti B; juncto ramo PB secante prædictum circulum in M, regulam in D, considero curvam A*a*B genitam ex circulari motu lineæ PA circa P, & ex progressivo puncti A per ipsam PA ita ascendentis, ut, non obstante ejus inclinatione ad regulam FH, ipsum punctum eamdem semper à regula distantiam observet, sit nempe FA semper æqualis DB; progressus igitur puncti A venientis in B, nempe excessus PB supra PA idem erit, ac excessus PD supra PF; eadem igitur velocitas erit hujus progressivi motus, atque illa quam haberet punctum F, si in circulatione PF ita per ipsam ascenderet, ut semper reperiretur in regula FH, eamque re ipsa describeret. Velocitas autem circularis in descriptione Conchoidis erit ad punctum B tantò major, quàm circularis velocitas in descriptione rectæ FH ad punctum D, quantò major est BP, quàm PD. Ducta igitur tangente circuli SMO, atque huic parallelis DI, BC, junctaque PIC, ducatur ramo PB parallela IK, occurrens regulæ in K, atque eidem parellela CQ æqualis ipsi IK, juncta QB erit tangens quæsita; motus siquidem per DK componitur ex motu per DI parallelam tangenti MS, quæ circularis motus directionem exhibet, & ex motu per IK parallelam PD, in qua est motus progressivus; sed & motus per A*a*B componitur ex eodem

TAB. X. Fig. 6.

eodem progreſſivo, qualem exhibet linea CQ æqualis, & parallela ipſi IK, & ex circulari in eadem directione, ſed tantò majori quantò longior eſt BP, quàm DP, adeòque optimè exprimendum per BC, quæ ad DI in eadem ratione reſpondet; igitur juncta QB dabit directionem motus ex utroque compoſiti; ideſt tangentem ad punctum B. Simili modo etiam Subconchoidis, (ſic voco curvam, ad quam ſunt puncta abſcindentia ex ramis PF, PD infra regulam æqualia intervalla) aliarumque ſpecierum in infinitùm curvarum Conchilium, & Subconchilium, cùm ſcilicet abſciſſa ex ramis, vel ſupra vel infra regulam, intervalla, non quidem radiis PM quadrantis circularis æqualia ſunt, ſed ſubtenſis, ſeu ramis PM, P*g* alterius cujuslibet figuræ GM*g* (quomodo ſi hæc ſit ſemicirculus circa diametrum PF, habebitur infra regulam Ciſſois Dioclea in infinitum continuata, quam propterea ad genus Subconchilium revoco) tangentes expeditè dabuntur, quas etiam geometricis demonſtrationibus confirmare, & generali quadam conſtructione exprimere in promptu eſſet, niſi verendum foret, ne longiùs ab inſtituto digrederer; itaque ſolam primariæ Conchoidis geometricam demonſtrationem, & qua Lector, ſi acuto pollet ingenio, facilè ſibi cæteras comparabit, in medium afferam, quæ quidem eſt hujuſmodi.

12 Supponatur BC concurrere cum regula in C; (poteſt enim tum BC, tum DI cujuslibet longitudinis eſſe, dummodò intra ramum PB, & junctam PC contineantur) ducto autem quovis alio ramo P*a*, ſecante regulam in *f*, ponatur *f*E æqualis, non quidem radio P*g*, ſed P*m* ſecanti anguli MP*g*, & ſic ubique fiat, ut habeatur curva EBE, quam manifeſtum eſt tangere Conchoidem in B; quia, cùm P*m* ſemper major ſit radio P*g*, etiam *f*E major erit intervallo Conchoidis *fa*; puncta igitur E ſemper ſunt ſupra

puncta *a* Conchoidis; ut igitur observat Verus Geometra in Recreatione Geometrica, quæ linea recta tanget curvam EBE, eadem tanget Conchoidem *aBa*, propter angulum contingentiæ semper indivisibilem, minoremque, ut dici solet, quovis angulo rectilineo. jam verò ostendemus curvam EBE esse hyperbolam intra asymptotos HNO, ejusque tangentem esse ipsam BQ convenientem cum regula in H; quia ducta PS regulæ parallela, occurrente tangenti MS in S, ob triangula similia DBC, PMS, quorum latera BD, PM sunt æqualia, æquales etiam erunt bases DC, PS, unde juncta SC æquidistabit ipsi DM; quare CN ad NS erit, ut DN ad NM, seu ut PS ad SM, vel CB, adeòque rectangulum NCB æquale erit ipsi NSP; eodem modo ducta ER ipsi BC parallela ostendetur junctam SR æquidistare ipsi *mf*, adeòque NRE æquale esse eidem NSP; æqualia igitur cùm sint rectangula NCB, NRE, curva EBE erit hyperbola intra angulum HNO; cùmque sit NC ad CD, ut MB, seu PD illi æqualis ad BD, idest (extensa IK ad BC in L) ut BL ad LC, seu IK ad KL, nempe CQ [æqualis ex constructione ipsi IK] ad excessum DB supra CQ, aut denique ut CH ad eamdem CD, erit NC ipsi CH æqualis; ergo HQB hyperbolam in B tangit, & consequenter Conchoidem: quod nobis propositum erat demonstrare.

TAB. XII. Fig. 7. 13. Jam tandem, ut promissam Theorematis IV. Hugeniani demonstrationem ex ea, quam proposuimus, methodo absolvamus, si in Logistica fiat, ut velocitas puncti A illam describentis, juxta genesim *cap.* 1. *num.* 5. indicatam, ad æquabilem velocitatem lineæ AB per axem delatæ, ita AB ad BO, constat ex dictis *num.* 3. atque hactenus abundè illustratis, junctam AO esse tangentem; similiter si fiat, ut eadem æquabilis velocitas ad velocitatem puncti fluentis in V, ita QC ad CV, juncta

juncta VQ tanget; habebit igitur velocitas in A ad velocitatem in V rationem compositam ex AB ad BO, & ex CQ ad CV, sive erit, ut AB in CQ ad BO in CV; sed eædem velocitates, ex dictis tum *cap.* 1. *num.* 3. tum indicatis hìc *n.* 6, sunt etiam ut BA ad CV; omnes quippe ordinatarum æquo intervallo distantium differentiæ sunt ipsis totis ordinatis proportionales, igitur AB in CQ ad BO in CV, est ut AB ad CV, quare subtangentes BO, CQ sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

14. Hinc obiter colligere possumus, quòd si parabola, cujus parameter dupla fuerit parametri Logisticæ, circa eumdem axem constituta fuerit, aut juxta ipsum axem fluere concipiatur, in quovis situ alteram altera ad rectos angulos secabit, putà parabola VF, cujus parameter dupla sit subtangentis Logisticæ GQ, & ad communem cum ipsa axem constituta, aut juxta ipsum fluens, utraque se intersecante in puncto F, aut *f*, angulus curvarum VFA, aut *uf*A semper erit rectus; Cùm enim intercepta GQ, inter ordinatam, & QF perpendicularem parabolæ, sit dimidia suæ parametri, demonstrante id Vero Geometra in Clariss. de Max. & Min. Op., erit in hoc casu æqualis subtangenti Logisticæ; ergo QF tangens Logisticæ, idest ipsamet curva AF, erit perpendicularis parabolæ VF, & è contra tangens EF parabolæ, seu ipsa curva parabolica VF, erit perpendicularis tangenti Logisticæ QF, seu curvæ AF in puncto quovis sibi occurrant. TAB. X. Fig. 7.

CAPUT VI.

Quintum Theorema proponitur, quod ut demonstretur, ostenditur, Hyperbolica spatia parallelis asymptoto proportionalibus definita æqualia esse; spatia quælibet eam inter se rationem habere, quam extremarum ordinatarum rationes. Axi Logisticæ parallelæ inter se sunt, ut Hyperbolica spatia iis respondentia. In Geometrica Spirali, arcus, & sectores circulares ejus ramis interjecti, proportionantur spatiis, & sectoribus Hyperbolicis respondentibus. Subtangens Logisticæ ad quamvis axi parallelam est, ut parallelogrammum Hyperbolæ inscriptum ad spatium Hyperbolicum. Demonstrandi modus à scrupulis vindicatur. Propositio universalior redditur. Quid sit facere Universale. Prima Geometricæ Spiralis subtangens est ad arcus circulares, ut Hyperbolæ parallelogrammum ad Hyperbolica spatia. Spatia Hyperbolica, aut sectores Hyperbolici in ea sunt ratione ad circulares sectores correspondentes, in qua minima ordinatarum hyperbolæ ad semissem subtangentis Logisticæ. Parallelogrammum Hyperbolæ inscriptum ad spatium ordinatis duplæ proportionis injectum est proximè, ut 10. ad 7. Quinti Theorematis Hugenii demonstratio.

1. LOngiùs in præcedenti capite progressi fuimus, quàm ab initio sperabamus: habenæ ideo contrahendæ in præsenti, in quo Quintum Hugenii Theorema nobis demonstrandum proponimus. *Hæc longitudo*, inquit de subtangente, *per approximationem reperitur, estque ad partem asymptoti interjectam ordinatis proportionis duplæ, ut* 4342944819032518o4 *ad* 30103999566398119 5, *seu proximè, ut* 13 *ad* 9. Quia tamen infiniti pene laboris, ac tedii esset longissimos hos

hos Hugenii numeros persequi, neque ad manum Tabulæ Logarithmicæ ad tam multiplices notas extensæ occurrunt, quibus verisimile est usum Hugenium ad ejusmodi calculum expediendum, ideo eumdem lapidem alia methodo movere aggrediar, majorique tum compendio, tum emolumento, vel ad hanc ipsam, vel ad aliam huic propinquam dictarum linearum proportionem intelligendam, Lectorum mentes disponam.

2. Præmittendum igitur, quòd Hyperbolæ, & Asymptoto interjecta spatia, alteri asymptoto parallelis proportionalibus terminata, invicem æqualia sunt; id quidem Gregorius à S. Vincentio, Magnus superioris sæculi Geometra, suæque Societatis Lumen Amplissimum, primus, quòd sciam, ostendit; quia tamen nec mihi, nec plerisque fortasse Lectorum meorum, ejus Codex ad manus est, placet demonstrationem hanc concinnare. Esto, asymptotis ABQ interjecta Hyperbola DER, assignenturque spatia DCNF, KLQR, definita extremis lineis DC, FN, & KL, QR alteri asymptoto parallelis, invicem verò proportionalibus. Dico ejusmodi spatia invicem æqualia esse; ex natura siquidem Hyperbolæ erunt etiam BC, BN, BL, BQ proportionales, utpote iisdem parallelis reciprocè respondentes; earumque differentiæ CN, LQ homologis terminis BC, BL, aut LK, CD itidem proportionales. Ordinetur ergo ad CN ipsa CG æqualis LK, & ipsa NI æqualis QR, atque inter duas CB, BN, sumpta media proportionali BM, ordinetur ME; similiter inter duas BL, BQ, sumpta media BO, ordinetur OP, cui æqualis ponatur MH; atque ita porrò sumptis aliis intermediis inter BC, BM, ac BL, BO, inter BM, BN, ac inter BO, BQ, ordinatæ ad extrema talium mediarum in spatio KLQR transferantur, & applicentur extremis dictarum mediarum in linea CN existentium, quoadusque fiat spatium CGHIN,

TAB. X. Fig. 8.

cujus

cujus ordinatæ ſunt æquales ordinatis ſpatii KLQR, ſed applicatæ ad partes altitudinis CN proportionales partibus altitudinis LQ; nec enim dubium, quin NM ad MC ſit, ut QO ad OL, utpote differentiæ trium continuè proportionalium ejuſdem utrobique rationis; (exiſtente ſcilicet NB ad BM, ut BM ad BC, dividendo eſt NM ad MB, ut MC ad CB, & alternando NM ad MC, ut MB ad CB, aut OB ad LB, ideſt, eadem ratione, ut QO ad OL) idemque de aliis intermediis dicendum. Jam ſic: ſpatium DCNF ad KLQR rationem habet compoſitam ex DCNF ad CGIN, & ex CGIN ad KLQR. Sed prima ratio eadem eſt, quæ DC ad CG, vel KL; (cæteræ enim ordinatæ EM, & MH, ſeu PO; FN, & NI, ſeu QR, aliæque intermediæ eamdem perpetuò rationem obſervant) ſecunda autem ratio eadem eſt, quæ altitudinis CN ad LQ, (per demonſtrata prop. 1. append. noſtræ Probl. *Vivian.*) hoc eſt, ex ſupra dictis, eadem, quæ ejuſdem LK ad CD; igitur ratio ſpatii DCNF ad KLQR componitur ex DC ad LK, & LK ad ipſam DC, ſcilicet eſt ratio æqualitatis. Quod erat demonſtrandum.

3. Hinc facillimè deducitur, ſpatia quævis Hyperbolæ, & aſymptoto interjecta, lineiſque alteri aſymptoto parallelis concluſa eſſe ad invicem, ut ſunt rationes extremarum ordinatarum, quibus concluduntur; ſpatia nimirum CDFN, OPQR, ita comparata ſint, ut ratio CD ad NF æqualis non ſit rationi OP ad QR, ſed in alia quavis proportione, putà altera alterius triplicata, aut duplicata, vel ſeſquialterata, &c. erit pariter alterum ſpatium alterius triplum, duplum, aut ſeſquialterum; ſumpto enim rationis CD ad FN quovis multiplici, putà ratione GH ad NF triplicata ipſius CD ad NF (ideſt ipſis FB, DB, ſumptis aliis duabus continuè proportionalibus KB, HB, erectiſque

TAB. X. Fig. 9.

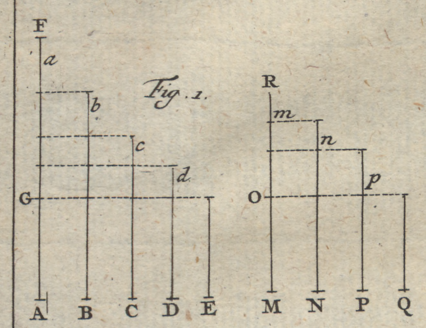
ordi-

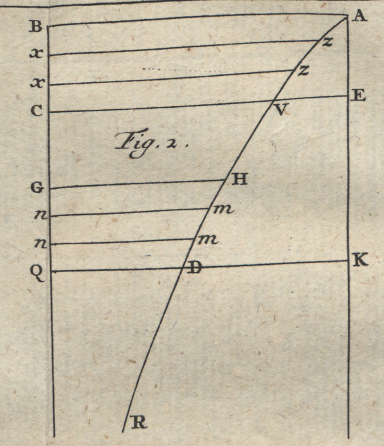
ordinatis KL, HG) constat spatium GNFH æquè multiplex fore spatii CDFN (ob singula spatia GK, LD ipsi CF æqualia ex *num. præced.* quippe lineis proportionalibus terminata.) Similiter rationis OP ad QR sumpta quavis multiplici, putà duplicata, EM ad QR (idest ipsi QB, PB sumpta tertia proportionali BM, atque erecta ME) patet spatium ERQM æquè multiplex, scilicet duplum fore spatii OPQR, quandoquidem EP æquabitur ex *num. præced.* ipsi OQ. Quòd si ratio GH ad NF æqualis foret rationi EM ad QR, spatium quoque GHFN æquaretur spatio EMQR, si illa major, & hoc majus, si ratio minor, & spatium minus (ut patet, aut apertè deducitur ex *præcedenti*) itaque, ex nota proportionalium definitione Euclidea, erit ratio linearum CD, & NF ad rationem linearum OP, & QR, ut spatium prioribus conclusum CDNF ad spatium posterioribus interjectum OPQR. Quod erat demonstrandum.

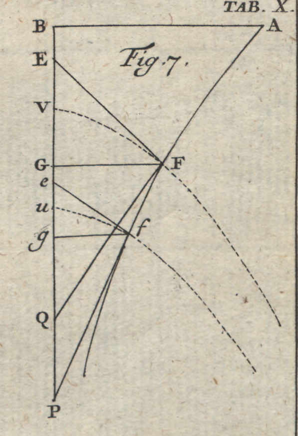
4. Unde apertè colligitur, quòd, si ordinatæ Logisticæ adhæreat præmissa figura hyperbolica linea NOR, atque asymptotis BQ, BA interjecta, quarum illa ordinata, hæc axis Logisticæ fuerit, producanturque ipsæ NF, OP ad Logisticam in S, R, erit spatium hyperbolicum NRQF ad spatium ORQP, ut axi Logisticæ parallelæ, FS, & PR; cùm enim dicta spatia sint ad invicem, ut rationes inter FN, QR, & inter OP, QR intercedentes, ut *num. præced.* ostensum est, sive ut rationes inter QB & BF, vel VS, & inter QB, ac BP, seu TR intercedentes, quæ quidem rationes ex dictis *cap.* 1. *num.* 3. sunt, ut portiones axis iisdem ordinatis interceptæ, VB, TB, seu SF, RP, etiam dicta spatia Hyperbolica NFQR, OPQR erunt, ut lineæ SF, PR. Quod erat demonstrandum. TAB. XIV. Fig. 1.

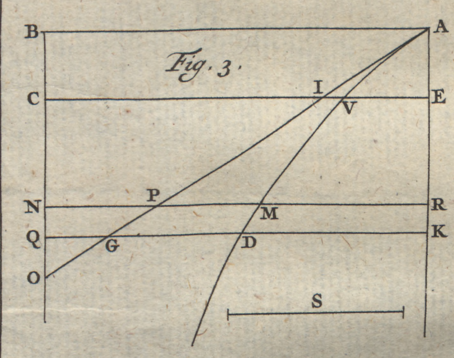
TAB XV. Fig. 10. 5. Simile quidpiam accidit Spirali geometricæ A*aa*, in qua arcus, aut sectores per radios spiralis abscissi, veluti AF, A*f*, aut ACF, AC*f* sunt, ut hyperbolica spatia AIMK, A*im*K comprehensa portionibus AI, & A*i* asymptoti AC, quibus differentiæ extremorum ramorum *a*F, *af* sint æquales [sunt enim I*a*, *ia* arcus concentrici ipsi AF*f*] & alteri asymptoto CG parallelis, curvaque hyperbolica iis intercepta; etenim arcus illi AF, A*f*, & consequenter & sectores ACF, AC*f* illis respondentes, ex dictis *cap.* 1. *num.* 10. sunt, ut rationes radiorum Spiralis AC, *a*C, seu AC, & CI, AC, & C*i*, in qua pariter sunt dicta spatia hyperbolica; cùmque ductis ex centro C rectis CK, CM, C*m* sector MCK ipsi spatio KAIM, & sector *m*CK spatio *mi*AK sit æqualis (ab æqualibus quippe triangulis KCA, MCI ablato communi CLI, additoque utrique residuo MLK res est perspicua) habebimus sectores hyperbolicos in eadem ratione sectoribus circuli ordinatim respondentes; erit enim MCK ad *m*CK, vel ad *m*CM, ut ACF, ad AC*f*, vel FC*f*.

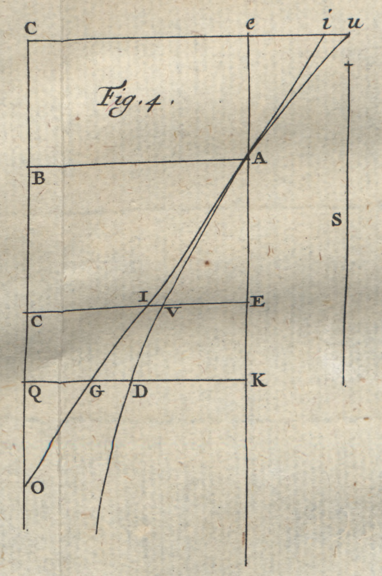
TAB. XIV. Fig. 1. 6. Colligi intereà ex supra dictis potest, quòd subtangens, seu parameter Logisticæ, est ad quamvis axi parallelam, ut parallelogrammum hyperbolæ inscriptum ad congruum spatium hyperbolicum, scilicet ad punctum R Logstiicæ ducta tangente RG, erit GT ad RP, ut parallelogrammum KOPB ad spatium OPQR; sumatur enim tangentis portio RS infinitè parva, ita ut ducta parallela ordinatæ SV, parallela axi SHN occurrente hyperbolæ in N, tum ipsa tangens RS ferè coincidat cum curva RS; necnon HS, ut terminata ad curvam ferè æqualis sit eidem, ut terminatæ ad tangentem; idest habeat ad ipsam rationem propiorem æqualitati, quàm quælibet data majoris inæqualitatis ratio

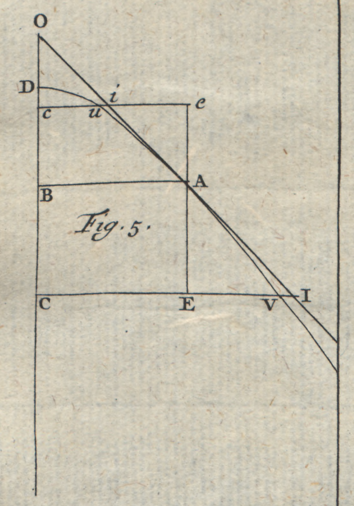

Fig. 1.
F
a
b
c
d
G
A B C D E
R
m
n
p
O
M N P Q

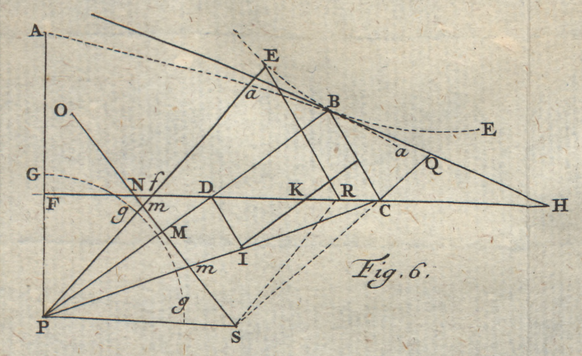

Fig. 2.
B
x
x
C
G
n
n
Q
A
z
z
E
V
H
m
m
D
K
R

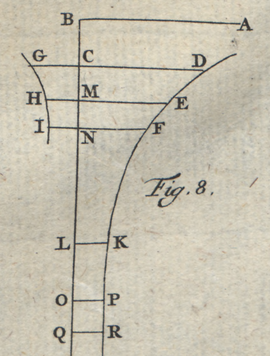

Fig. 7.
B
A
E
V
G
F
e
u
g
f
Q
P

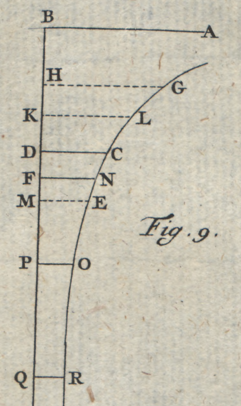

Fig. 3.
B
A
C
I
V
E
N
P
R
M
Q
K
G
D
O
S


Fig. 4.
C
e
i
u
B
A
S
I
V
E
C
Q
G
D
K
O


Fig. 5.
O
D
i
c
u
e
B
A
C
E
V
I


Fig. 6.
A
E
a
B
E
O
G
N
f
a
Q
F
g
m
D
K
R
C
H
M
I
m
g
P
S


Fig. 8.
B
A
G
C
D
H
M
E
I
N
F
L
K
O
P
Q
R


Fig. 9.
B
A
H
G
K
L
D
C
F
N
M
E
P
O
Q
R


POLITECHNIKA GDAŃSKA
BIBLIOTEKA
CENTRALNA

ratio quantumlibet parva, tum etiam hyperbolicum ſpatium NFPO ferè cum rectangulo OPF coincidat, ſeu illud excedat minori exceſſu quolibet dato; conſtat ex *num.* 4. & dividendo, fore ſpatium NFPO ad OPQR, ut HS ad PR, & ſumptis antecedentium æquè proportionalibus, parallelogrammo KP, & linea TG (eſt enim KP ad OPF ferè cum ſpatio PN coincidens, ut BP ad PF, ſeu TR ad RH, vel TG ad HS, prout terminatam ad tangentem, quæ ferè coincidit cum terminata ad curvam in S) erit parallelogrammum KP ad ſpatium OPQR, ut TG ad PR. Quod erat demonſtrandum.

7. Si cui videatur audacior præcedentis demonſtrationis proceſſus, ſimulque infirmior, quàm ut aſſenſum extorqueat, is demonſtratione apagogica utatur, per me licet, immò ut huic & ſimilibus applicare diſcat, ſpecimen hìc dabo. Fingat ſibi quis minorem eſſe, ſi fieri poſſit, alterutram dictarum rationum, verbi gratia ratio GT ad PR minor eſto ratione KP ad ſpatium OPQR, ita ut illi adiicienda foret ratio alia majoris inæqualitatis, quæ ſit inter *c*, & *d*, ad hoc ut huic alteri rationi æqualis evadat. Cùm itaque ratio PR ad HS (ut terminatam ad curvam) ſit poſteà eadem, quæ OPQR ad ſpatium NP, erit rurſus ratio TG ad eamdem HS minor, quàm ratio KP ad ſpatium NP, eodem defectu rationis *c* ad *d*; poteſt autem HS terminata ad curvam eſſe ad HS, ut terminatam ad tangentem in ratione minori, quàm quælibet data ratio *c* ad *d*; ſi igitur rationi TG ad HS priorem addatur ratio HS prioris ad HS poſteriorem, fiet ratio TG ad HS poſteriorem, hoc eſt TR ad RH, vel KP ad rectangulum OPF, adhuc minor, quàm ſit ratio ejuſdem KP ad ſpatium NP, quod eſt impoſſibile; foret enim rectangulum OPF majus ſpatio NFPO, cui inſcribitur.

Si verò dicatur e contra ratio KP ad ſpatium OQ minor altera ratione TG ad PR, fiet eadem demonſtratio, incipiendo ex parte ſpatiorum, unde concluderetur, quòd HS terminata ad tangentem major foret, quàm HS terminata ad curvam, ſeu quòd tangens curvam ſecaret. Nullus igitur eſſe poteſt in ratiocinio noſtro ſcrupulus, nec de fallacia inſimulari debet, ſed de compendio laudari.

8. Intereà notandum velim, præmiſſam demonſtrationem non pendere ab ulla ſive Hyperbolæ, ſive Logiſticæ proprietate, ſed hinc dumtaxat, quòd ſpatia hyperbolica proportionalia ſint parallelis axi Logiſticæ; quæ affectio infinitis curvis invicem comparatis communis eſſe poteſt; ut ſi FQN ſit triangulum apicem habens in Q, & FQS trilineum parabolicum, utique axi parallelæ erunt, ut interceptarum FQ, PQ quadrata, ſive ut ſimilia ſpatia triangularia his inſiſtentia; ſi ſuperior figura ſit trilineum parabolicum quadraticum, inferior erit parabolicum cubicum, & ſic de aliis, tum parabolarum ſpeciebus, tum curvarum generibus; quocirca eamdem demonſtrationem iis applicare potes, aut univerſaliùs ipſum Lemma concipere ſic. In qualibet curva QRS, cujus ordinatæ PR, FS (ſumpto FQ pro axe) ſint in eadem ratione cum ſpatiis PORQ, FNRQ per eaſdem ordinatas abſciſſis ex figura NRQF, eidem axi applicata, erit ſubtangens GT ad PR, ut rectangulum, ſeu parallelogrammum OPB ad ſpatium OPQR; & converſim, ſi ut illud parallelogrammum ad hoc ſpatium, ita fuerit PR, ſeu BT ad TG, juncta GR erit tangens; nec refert cava ne, an convexa ſint ſpatia, quæ comparanda ſunt, eadem quippe ratio ſemper militat, aut parum certè immutata. Hinc aliam habes tangentium ducendi methodum, aliaſque, & alias veritates per te, prudens Lector, extundere poteris, ſed

sed (quod majori in pretio habendum est) hinc disces Veterum, & Recentiorum Geometrarum propositiones Universaliores reddere, attendendo, num proprietates, quas specialiter de quadam figura demonstrant ex peculiari ejus affectione pendeant, an verò ex communi pluribus Symptomate deriventur. Atque id revera est facere Universale, quod adeò deprædicant Metaphysici, & an per intellectum, an verò, ut barbarè loqui solent, etiam à parte rei dari possit, exquirunt. Quod quidem ipsis integrè decidendum relinque, mi Lector, atque ab ea sollicitudine bonas horas aliis utilioribus studiis debitas redimere satage, spondeo enim, aliquot sæculorum myriadibus antequàm illi conveniant, & quod, tot tricarum apparatu expiscari contendunt, in aperto ponant (uti hactenus certè incassum laborasse video, nec à tot sæculis, vel latum unguem profecisse, aut aliquam saltem inde utilitatem in Philosophicis aut Theologicis rebus inde sibi, aliisve exculpsisse, plus nimiò expertus agnovi), Te innumerabiles, atque utillissimas veritates geometricas inventurum per illud, quod superiùs descripsi, Geometricum Universale, ejusdemque applicationem ad multiplices figurarum species, quas aut Geometria ministrat, aut sibi facilè unusquisque fingere poterit.

9. Nec intereà omittendum, quòd Spirali Geometricæ rursus quid simile contingit, quod ipsi Logisticæ; subtangens enim CB prioris radii AC est ad quemvis arcum AF, aut A*f*, ut parallelogrammum hyperbolæ inscriptum KAC ad spatium correspondens MIAK, aut *mi*AK, quod, tum eadem methodo probari potest, tum & de se patet, quum ex dictis *cap. præced. num.* 10. prima subtangens CB sit eadem, quæ erat subtangens Logisticæ, ex cujus convolutione, juxta dicta *cap.* 1. *num.* 12. Geometrica Spiralis gignitur, ordinatis in TAB. XV. Fig. 10.

radios commeantibus, & axis portionibus, ejusve parallelis in arcus curvatis, ac propterea eadem erit ipsius CB ad arcum AF ratio, quæ priùs erat subtangentis ad parem axis portionem, ejusve parallelam, adeòque eadem, quæ parallelogrammi prædicti ad assignatum hyperbolicum spatium.

10. Exinde autem habetur, quòd spatia illa hyperbolica, aut sectores iis æquales, de quibus *num.* 5. in ea semper ratione erunt ad correspondentes circulares sectores, in qua minima ordinatarum spatii hyperbolici AK ad semissem subtangentis CB; etenim si AK supponatur æqualis dictæ subtangenti CB, erit ut rectangulum KAC ad spatium hyperbolicum KAIM [quod sumi poterit latitudinis AI infinitè parvæ, ut ferè coincidat cum inscripto rectangulo KAI] idest ut CA ad AI, ita ipsa KA, vel ipsa CB ad arcum AF, ex numero superiori; rectangulum igitur KAI, seu spatium ipsum hyperbolicum MIAK erit æquale rectangulo radii CA in arcum AF, hoc est duplum sectoris ACF; cùmque ex dictis *num.* 5. & alii sectores aliis spatiis in eadem sint ratione, singula spatia KAIM, KA*im*, aut hyperbolici sectores KCM, KC*m*, dupli erunt respondentium sectorum circularium ACF, AC*f*; & si AK æqualis fuerit semissi CB, erunt dicta spatia, & sectores hyperbolici ad circulares sectores in ratione æqualitatis; si quis autem obrepserit scrupulus circa hanc demonstrationem, remedio numeri septimi ritè applicato amoliendus erit.

TAB. XI. Fig. 1. 11. Jam ostendendum est, quòd parallelogrammum Asymptotis, & Hyperbolæ inscriptum, est ad spatium hyperbolicum, cujus extremæ ordinatæ duplam proportionem servent, proximè ut 10. ad 7. Esto ALBE quadratum hyperbolico spatio, quod hyperbola AG, asymptotis LBF continetur, inscriptum; & sumpta FE

FE æquali ipsi EB, ordinetur FG: erunt ordinatæ AE, FG in ratione dupla. Dico quadratum EL ad spatium AHGFE (adeòque & quodvis parallelogrammum inscriptum ad spatium ordinatis rationis duplæ interjectum) esse proximè, ut 10. ad 7, ducta enim diametro BA, & juncta AF (quæ tangens erit, quoniam extensa ad alteram asymptoton bifariam secaretur in A, prout BF bifariam secaretur in E) ductaque GD, & HICNK asymptoto BF parallelis; quoniam rectangula ALB, HKB æqualia sunt, & communi ablato BEC æqualia remanent ECH, KCA, erit HC ad CA, vel CI (ob angulum EAF semirectum), ut KC, seu EA ad EC, & dividendo, HI ad CI, vel CA, ut CA ad CE; cùm igitur sint EC, CA, IH continuè proportionales, erit tertia IH æqualis quadrato secundæ CA diviso per primam CE; itaque si EA dicatur æqualis a, & quælibet portio AC dicatur c, erit HI æqualis $\frac{cc}{a-c}$; intelligatur ergo AE in 100. æquales particulas dividi, quarum AD erit 50; & si ab A sumantur per ordinem 1, 2, 3, &c. ejusmodi particularum, & calculo exprimantur lineæ in trilineo AMG respondentes, prout HI correspondet ipsi AC, invenietur hæc series $\frac{1\times1}{100-1}$, $\frac{2\times2}{100-2}$, $\frac{3\times3}{100-3}$, &c. usque ad $\frac{50\times50}{100-50}$; hæc enim est expositio universalis expressionis suprapositæ $\frac{cc}{a-c}$ pro diverso valore ipsius c; idest rectæ illæ, velut IH, in trilineo AMG paralllelæ, & ad centesimas quaslibet ipsius AE partes applicatæ, erunt per ordinem $\frac{1}{99}$, $\frac{4}{98}$, $\frac{9}{97}$, &c. usque ad $\frac{2500}{50}$, quod æquatur ipsi MG 50 ejusmodi particularum. Summa igitur harum omnium fractionum designabit proximum valorem, seu quantitatem trilinei AMG, respectu quadrati

drati AEB, quod eſt in hac ſuppoſitione 10000; porrò illæ fractiones ad minimos terminos redactæ, & ſimul additæ, dant circiter 700 (ut experiri unuſquiſque poterit, ſi ſatis otii, & patientiæ habuerit ad calculi laborem ferendum) triangulum verò ADM æquatur dimidio quadrati AD, ſcilicet 50 ducto in 25, quod eſt 1250, & parallelogrammum GDEF, quadrati AE ſubduplum, eſt 5000, igitur ſumma ex trilineo, triangulo, & parallelogrammo, nempe ſpatium hyperbolicum AGFE eſt 6950, ut ex hac formula patet.

Trilineum AMG	700
Triangulum ADM	1250
Parallelogrammum GDEF	5000
Summa, ſpatium GAEF	6950

Proportio itaque ſpatii AGFE ad quadratum AEBL eſt eadem, quæ 6950 ad 1000, ſeu, dividendo utrobique per 50, ut 139 ad 200, quæ eſt circiter 140 ad 200, aut ſubdividendo per 20, ut 7 ad 10; & hoc fuerat demonſtrandum.

TAB. XII. Fig. 1. 12. Jam V. Theorem. Hugenii demonſtrationem ſic expedio. Sit AD dupla DK, ſeu FB ordinatæ ad Logiſticam, ABb, erit FD intercepta axis inter ordinatas duplæ proportionis; oſtendendum eſt FO ſubtangentem, ſeu parametrum Logiſticæ eſſe ad FD, vel BK proximè, ut 13 ad 9. Jam ex dictis *num.* 6. eſt FO ad BK, vel DF, ut parallelogrammum inſcriptum hyperbolæ ad congruum ſpatium hyperbolicum, quod in hoc caſu (ſi intelligatur ſuper AD deſcriptum, & ordinatis ex A, & K definitum) terminatur ordinatis duplæ proportionis, propter AD duplam

plam DK; sed illud parallelogrammum ad tale ſpatium hyperbolicum, ex *præcedenti numero*, eſt proximè, ut 10 ad 7, ergo & OF ad DF, vel BK erit proximè in eadem ratione 10 ad 7, aut utrobique per 13 multiplicando, ut 130 ad 91, quod proximum eſt rationi 130 ad 90, hoc eſt 13 ad 9. Ratio igitur ſubtangentis, ad axis portionem interceptam ordinatis duplæ rationis, proximè eſt, ut 13 ad 9, uti Hugenius in hoc Theoremate propoſuerat.

CAPUT VII.

Sextum Theorema proponitur, & univerſaliùs demonſtratur. Spatia Logiſtica in data ratione dividere; Cavum trilineum convexo æquale; rectangula ſpatiis Logiſticis æqualia. Item ſpatiis hyperbolicis. Ordinatæ in trilineo Logiſticæ, axi parallelæ, convexis, & cavis hyperbolæ ſegmentis proportionales. Eadem aliis figuris applicare. Hyperbolam ducere, quæ datam Logiſticam, vel in dato puncto contingat. Maximum parallelogrammum Logiſticæ inſcribere, & duo utrinque æqualia determinare. Data cujuſvis figuræ tangente maximum illi parallelogrammum inſcribere, & contra. Idem circa alia maxima præſtare per alias hyperbolas. Infinitarum hyperbolarum tangentes. Spiralis geometricæ ſpatia inter ſe, & cum ſuis partibus comparantur. Cujuſvis convolutæ figuræ, ejuſve partium ad circumſcriptum ſectorem, & ejus zonas proportio eadem, quæ Conoidis ab evolutâ figurâ, ejuſve partium, ad circumſcriptum cylindrum, & tubos cylindricos. Evolutæ ad convolutam ratio, quibus compoſita. Exempla in Spiralibus. Geometricæ Spirali doctrina applicatur.

TAB. XII. Fig. 1. 1. PRopofuit in Sexto Theoremate Hugenius, quòd, *fi fuerint tres ordinatæ, velut in hac figurâ funt AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur afymptoto parallela fecans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ eafdem fecans in N, & Q; fpatia trilinearia ABK, HBR funt inter fe, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, ideft, ut AQ, HN.* Quod quidem ferè cum fecundo Theoremate coincidit, poteftque, ex *cap.* 4. *num.* 4. dictis, demonftrari, ut patebit, applicando demonftrationem lineæ *gh* minufculis litteris expresfæ, fecanti tangentem in *n*, axi parallelam per B ductam in *r*; patebit enim interceptas tangenti, & Logifticæ curvâ, ordinatis parallelas, five infra, five fupra punctum contactus effe, ut fpatia comprehenfa iifdem ordinatis, Logifticæ curvâ, & axi parallelâ per contactum ductâ, adeòque fecundum, & fextum Theorema in unum convenire.

2. Sic igitur argui poterit. Cùm fit OF ad FB, ut BK ad KQ, erit OF in KQ æquale FBK rectangulo; fed FO in BM, feu in totam KA æquatur toti fpatio DABF per *cap.* 4. *num.* 3., igitur FO in refiduam QA æquatur refiduo fpatio KAB: eodem modo oftendetur OF in RN, feu *rn*, æquale rectangulo FBR, FB*r*; adeòque cùm fit HGFB, *hg*FB, æquale FO in BS, feu HR, vel *hr*, erit fpatium RBH, *r*B*h*, æquale FO in NH, *nh*; adeòque trilineum AKB ad HRB, feu *hr*B, erit, ut AQ ad NH, feu *nh*, quæ funt bafes rectangulorum fub communi altitudine fubtangentis FO illis fpatiis æqualium. Et hoc fuerat demonftrandum.

3. Hinc facilè erit, quævis Logifticæ fpatia, five concava, five convexa per ordinatas in data ratione, dividere; fpecialiter autem hinc inferre juvat, quòd fi ex quovis

quovis puncto H Logisticæ, ducatur tangenti O N parallela, occurrens curvæ ultra contactum in *h*, erit portio Logisticæ concava HRB æqualis convexæ *hr*B, propter æquales HN, *hn*, iis parallelis interceptas; immò addito utrinque spatio BHS, cum rectangulo SB*r*, inferes rectangulum HR*r* æquale esse spatio Logisticæ, curvâ H*h*, ipsâque HS ad *hr* extensâ, intercepto; indeque rectangulum GR*r* æquale residuo spatio GHB*hg*, æquale proinde & rectangulo ex OF subtangente in RH cum *rh*, seu in *s*S, adeòque OF ad G*g* se habere, ut GR, seu BF, ad *s*S; sed nimiùm minutis detineor.

4. Expendere potiùs juvabit, quibus spatiis proportionales sint lineæ in trilineo NBH, aut *n*B*h*, parallelæ, non quidem ordinatis, sed ipsimet axi. Inter asymptotos AD, DF, ducatur per ipsum punctum B Logisticæ hyperbola *r*B*rr*R; ante omnia ostendendum est, tangente Logisticæ OB occurrente supremæ ordinatarum, seu asymptoto hyperbolæ in P, rectangulum BKP æquari spatio hyperbolico *k*B*r*RA; est enim rectangulum BKP ad KBF rectangulum hyperbolæ inscriptum, ut illius basis PK ad basim hujus KD, seu BF, hoc est, ob similitudinem triangulorum, ut KB ad subtangentem Logisticæ FO, indeque, ex *cap. præced. num.6.*, ut hyperbolicum spatium AR*r*BK ad idem parallelogrammum FBK; æqualia igitur sunt rectagulum BKP, & spatium hyperbolicum AR*r*BK: quod fuerat demonstrandum; sed & alibi generaliùs idem ostendemus, scilicet *cap.* 13. *num.* 2. TAB. XI. Fig. 2.

5. Cùm verò, ex *cap. præced num.4.*, spatium hyperbolicum KBRA ad quodvis aliud axi Logisticæ parallelis resectum K*r*RA sit, ut KB ad *kh*, & dividendo spatium hyperbolicum KB*rk* ad *r*RA*k*, ut *sh* ad *hk*; manifestum est, sumpta communi altitudine KP, dictarum linearum in KP ductarum rectangula proportio-

nari ſpatiis hyperbolicis correſpondentibus, adeòque rectangulum PK in *kh* æquari ſpatio *kr*RA, & rectangulum ejuſdem PK in *sh* æquari ſpatio KB*rk*, &c.

6. Parallelæ igitur axi Logiſticæ, trilineis NBH, *n*B*h* concluſæ, proportionales erunt reſpectivis trilineis hyperbolicis *r*BS, *r*B*s* convexis, aut concavis, prout citra, vel ultra B parallelæ ducuntur; etenim demonſtratione *num.* 3. iterùm applicatâ; cùm ſit KP ad BK, ut BM ad MQ, vel BS ad SN, & B*s* ad *sn*, erit rectangulum KBM, vel KBS, aut KB*s* æquale rectangulo ex PK in MQ, SN, vel *sn*; ſed etiam ſpatium BKAR, aut BK*kr* æquatur, ex *num. præced.*, rectangulo ejuſdem PK in MA, aut SH, vel *sh*; igitur rectangulum ex PK in reſiduam AQ, vel HN, aut *hn*, æquale erit trilineo hyperbolico RBM, aut *r*BS, &c. & ideò lineæ AQ, NH, *nh* axi Logiſticæ parallelæ, ejuſque curva, & tangente concluſæ, erunt ut reſpectiva hyperbolica ſpatia ſupra definita. Quod erat demonſtrandum.

7. Aliis figuris ſimilem comparationem ſuſcipientibus, ut ordinatæ unius proportionales ſint ſpatiis abſciſſis alterius, applicari res eadem poteſt, quemadmodùm, tum hìc, tum alibi locum habere poſſunt obſervationes, & corollaria ſimilia his, quæ *num.* 3. indicavimus; ſpecialia verò problemata duo ex ſola figuræ hujus inſpectione facillimè ſolves. Alterum: Inter aſymptotos FD, DA, quarum illa ſit axis, hæc ordinata Logiſticæ AB*h*, hyperbolam ducere, quæ Logiſticam in aliquo puncto B tangat; vel dato in Logiſtica puncto B, hyperbolam nihilominus reperire, quæ idem præſtet: ponatur DF æqualis ſubtangenti FO: ordinatis FB, & DA, fiat per B hyperbola inter aſymptotos FDA; hæc procul dubio Logiſticam tanget; ſiquidem eadem OB, tum Logiſticæ, tum Hyperbolæ tangens communis

nis erit; unde consequitur, quòd, si fingatur per aliud punctum B ducta hyperbola, occurret in alio puncto eidem Logisticæ, supra B quidem, si FD major fuerit subtangente, infra verò si minor. Alterum est. Logisticæ maximum parallelogrammum inscribere: ponatur DF subtangenti æqualis, & ordinetur FB: patet DFB maximum fore omnium, quæ dato Logisticæ spatio inscribi possint, parallelogrammorum; alia siquidem parallelogramma eidem Logisticæ spatio inscripta minora erunt, eò quòd, ut illud primum adæquent, extendenda sint usque ad perimetrum hyperbolæ per B descriptæ, quæ tota ultra Logisticam cadit, utpotè ipsam tangens, ex nuper dictis: unde patet, cuivis alteri parallelogrammo aliud æquale eidem Logisticæ inscriptum exhiberi posse, ducta scilicet per punctum, ubi Logisticæ occurrit, Hyperbola, quæ in alio puncto Logisticam secans dabit punctum, ad quod inscribatur parallelogrammum æquale priori, eò quòd utraque spatio asymptotis, hyperbolæ interjecto inscribantur.

8. Leviuscula quidem hæc, si per sese considerentur, at ratione methodi, quam generalem esse Lectorum sollertia percipiet, suo pretio non fraudabuntur: hinc enim habebimus, data ratione, quam habere debet subtangens ME figuræ ABHG ad abscissam AE, dari & maximum parallelogrammum EBL ipsi inscriptibile, si nimirum in eadem data ratione fiat GE ad EA, ut GE, EM sint æqualia, tangens quippe MBI erit & tangens hyperbolæ CBC per B inter asymptotos AG, GH ductæ, atque adeò quodvis aliud parallelogrammum GFDK datæ figuræ inscriptum minus erit parallelogrammo GFC, atque adeò minus GEB, quod proinde maximum esse convincetur; & è contra, dato maximo parallelogrammo GEBL figuræ ABHG inscripto, dabitur ejus tangens, posita EM æquali EG, quia quodvis aliud parallegrammum GFD, TAB. XI. Fig. 3.

 cùm

cùm ſit minus ipſo GEB, erit & minus GFC (ducta per B inter eaſdem aſymptotos hyperbola CBC & ideò FD minor erit, quàm FC, & hyperbola CBC curvam DBD tanget; ſed hyperbolam tangit recta MB, ergo & curvam DBD propoſitam. Et quod de parallelogrammis maximis dictum eſt, aſſumpta hyperbola lineari, poteſt ad maximos cylindros, aliave maxima facta ex gradibus coordinatarum EB, BL transferri, uſurpatis alterius generis hyperbolis, quadratica, cubica, &c. in quibus facta ex homonymis coordinatarum gradibus ſunt æqualia, eò quòd quadrata, aut cubi ordinatarum reciprocentur diſtantiis à centro, ſeu angulo aſymptotali.

9. Quòd ſi earumdem infinitarum hyperbolarum, in quibus videlicet non ſimplices lineæ BL, CN, ſed ipſarum quadrata, aut cubi, aliique majores gradus ſint in reciprocra ratione diſtantiarum GL, GN, earumve, graduum quorumcumque, tangentes ignorare te dicas: ne deſponde animo, paucis, adverte, docebo, & quidem ex hac ipſa, quam præ manibus habemus, methodo demonſtrationem eruendo: exponens graduum, quos conſideramus in ordinatis BL, CN, eſto x; graduum verò, qui conſiderantur in diſtantiis NG, GL eſto y; ducta ex quolibet hyperbolæ puncto BE aſymptoto parallela, fiat GE ad EM, ut x ad y, juncta MB tanget quia enim ut x ad y, ita GE ad EM, factum ex gradu GE, cujus exponens x, in gradum EM, cujus exponens y, maximum erit omnium ſimilium factorum ex partibus lineæ GM utcumque diviſæ, uti ex maximorum, minimorumque methodo facilè conſtat; quare & factum ex ſimilibus gradibus GEB maximum erit omnium ſimilium factorum ex lateribus parallelogrammi triangulo MIG ad aliud, quàm B punctum inſcripti; quæ igitur linea tangit figuram triangularem MIG in B, (ipſum nempe latus MI) tanget in eodem puncto

puncto hyperbolam CBC ex iisdem gradibus coordinatarum constitutam.

10. Jam ad institutum nostrum, unde paululum divertimus, propiùs accedentes, quemadmodùm in Logistica Hugenius propos. 1. 2. & hac, quam præ manibus habemus, sextâ, varia ejus segmenta invicem comparavit; ita, ut in Logistica convoluta, nempe Spirali Geometrica, idem nos præstemus, argumenti similitudo suadet. Primùm igitur, sicut Logisticæ spatia post quamlibet ordinatam in infinitum protensa sunt, ut ipsæ ordinatæ, ex dictis *cap.* 3. *num.* 7., ita Spiralis geometricæ spatia post quemlibet ejus radium in infinitum circa centrum per innumeras, sibique superimpositas circulationes, continuata sunt inter se, ut quadrata eorumdem radiorum; intellecto enim spatio Spiralis A*aa*C in TAB. XV. Fig. 10. triangula innumera, ut *cap.* 1. *num.* 11. factum est, distributo, quæ, ex ibi dictis, similia erunt, AC*a*, *a*C*a*, &c. erunt singula inter se, ut homologorum radiorum quadrata, quæ continuè proportionalia sunt, juxta curvæ hujus naturam; itaque, ut unum AC*a* ad unum *a*C*a*, ita omnia spatio A*a*C inclusa ad omnia inclusa spatio *aa*C (sunt quippè totidem hìc, atque ibi, utpotè multitudinis utrobique infinitæ) nempe, ut quadratum AC ad quadratum *a*C, ita spatium, quod post AC intra dictam Spiralem convolvitur, ad spatium, quod post *a*C eàdem Spirali concluditur.

11. Hinc dividendo habetur, spatium AC*a* esse ad infinitè contortum post minorem radium C*a*, ut differentia quadratorum AC, *a*C, seu CI ad minoris *a*C, vel CI quadratum, hoc est, ducto arcu *a*I, ut armillæ portio FAI*a* ad sectorem I*a*C, sicuti *cap.* 3 *num.* 8. & in tertio Theoremate Hugenii demonstrando *cap.* 4. *num.* 5. ostendimus, in Logistica spatium duabus ordinatis interjectum esse ad infinitè longum post minorem ipsarum protensum, utì est differentia ipsarum

ordi-

ordinatarum ad minorem ex ipsis; & veluti in primo Hugenii Theoremate *cap.* 3. demonstrato, spatia Logisticæ ordinatis conclusa erant, ut extremarum ordinatarum differentiæ, ita in Spirali geometrica spatia quælibet A*ca*, *aca* erunt inter se, ut differentiæ quadratorum ab extremis radiis dicta spatia comprehendentibus, sive, ut circulares armillæ FAI, *fai*, illis adscriptæ.

12. Trilineis verò *a*IA, sive ad invicem, sive cum residuis *a*AF, aut cum zonis FAI*a* comparandis, inserviet generale hoc Theorema. Si quævis figura LHC,
TAB. XI. Fig. 4. axe AL in punctum A contracto, illique parallela KC in arcum CG æquabiliter curvata, transeat in Spiralem CEA, ordinatis HM, *hm* in totidem ejus ramos, seu radios AE, A*e* abeuntibus, & per angulum EA*e* divaricatis, cujus mensura sit arcus D*d* æqualis intervallo ordinatarum, nempe ipsi M*m*, vel N*n*: Dico Spirale spatium CEA fore ad circumscriptum sectorem CGA, utì est conoides ex figura LHC circa axem LA ad circumscriptum cylindrum ex parallelogrammo AK circa eumdem axem revoluto. Ducto pariter quovis arcu EB, aliisque lineis coordinatis, ut in figura,
TAB. XIV. Fig. 1. trilineum BCE fore ad circumscriptam zonam BCDE, utì est annulus ex HCB circa axem revoluto ad tubum cylindricum ex circumscripto parallelogrammo HNCB circa eumdem axem, ac dividendo, trilineum BEC ad CED esse, ut sunt annuli ex ipsis HBC, HCN circa axem revolutis; quodlibet etiam trilineum BEC ad aliud *be*C, aut CED ad aliud C*ed* esse, ut sunt annuli ex ipsis BHC, *bh*C, aut ex HCN, *h*C*n* circa ipsum axem; portiones quoque BE*eb*, sive ad aliam *beeb*, sive ad trilineum quodvis BCE esse, ut respectivè inter se sunt annuli ex HB*bb*, *bbbh*, aut HBC circa ipsummet axem LA. Longior est propositio, quàm demonstratio. Arcus enim BE ad BF est, ut CD ad CG, scilicet ex constructione, ut CN ad

ad CK, vel BH ad BI, nempe ut cylindrica ſuperficies, quæ in conoide ex linea BH, ad cylindricam ſuperficiem, quæ in cylindro per lineam BI circa axem revoluta producitur; & hoc ſemper, ſive lineas majuſculis litteris, ſive minuſculis notatas inter ſe compares; ſunt autem tum arcus BF, in ſectore concentrici, tum cylindricæ omnes ſuperficies ex BI, concentricæ in cylindro, proportionales, quippe in eadem ratione diſtantiarum à centro A, vel axe AL; ergo, ex Lemmate 29. Torricellii de dimenſione parabolæ, omnes arcus concentrici in ſectore ad omnes concentricos in ſpatio Spirali erunt, ut ſunt omnes ſuperficies cylindricæ in cylindro ad omnes cylindricas ſuperficies in conoide; unde & dividendo, & proportionales partes comparando, habebitur veritas Theorematis propoſiti.

13. Quandoquidem ob æqualitatem arcus CG cum axe figuræ LA, ductâ ſubtensâ LC, erit triangulum LAC æquale ſectori CGA, atque adeo erit ad Spirale ſpatium in eadem ratione, in qua cylindrus conoidi circumſcriptus ad ipſam conoidem; hinc figura quælibet evoluta ad convolutam rationem habebit compoſitam ex ratione ſui ad triangulum æquè altum in eadem baſi, & ex ratione circumſcripti cylindri ad conoidem ex ejus revolutione circa axem genitam. Cùm Spiralis Archimedaea, ob æquabilitatem motuum quibus componitur, habeat radios proportionales ordinatis in triangulo baſi parallelis, indeque fiat convolutione trianguli axem habentis parem arcui ſectoris circumſcripti, fit inde, ſpatium ſpirale trientem eſſe circumſcripti ſectoris, quemadmodum conus ex triangulo triens eſt circumſcripti cylindri; & cùm ſecunda Spiralis quadratica fiat convolutione parabolæ, cujus ad inſcriptum triangulum ratio eſt ſeſquitertia, cylinri verò circumſcribentis conoidem ab ipſa genitam

ratio eſt dupla, ideo ſpirale ſpatium quadraticum erit ſemiſſis circumſcripti ſectoris, habebit verò parabola, ex qua gignitur, ad ſe ipſam in tale ſpatium convolutam, rationem compoſitam ex ſeſquitertia, & dupla, ideſt quam 8 ad 3., & ſic deinceps applicationem proſequere mi Lector.

14. Ego ad Spiralem Geometricam revertor, in qua, utpote ex convolutione Logiſticæ genita, jam ſcies Trilinea, initio *num.* 12. recenſita, eam inter ſe rationem habitura, quam annuli ex correſpondentibus Logiſticæ portionibus trilinearibus circa axem revolutis, ſive inter ſe, ſive cum tubis cylindricis illos circumſcribentibus comparatis, ubi geometricæ Spiralis trilinea cum zonis circularibus illa includentibus conferantur; quomodo autem illi annuli ex Logiſticæ portionibus geniti notam habent quantitatem, nonniſi perſpecta ſolidorum, quæ ex Logiſtica circa axem revoluta producuntur, menſura, oſtendi poteſt; de qua re, in nono Theoremate cum Hugenio, agendum erit, ideoque ex dicendis *cap.* 9. *num.* 10. defectus ſupplendus eſt.

CAPUT VIII.

Septimum Theorema pridem oſtenſum, ut nova demonſtratione fulciatur, oſtenditur, ſpatio à qualibet curva contento quò ad totum, & quò ad partes æquale ſpatium ex ſubtangentibus ad curvæ puncta applicatis, vel ad reſpectiva puncta baſis: item ducta per quodvis punctum tangentibus parallela, occurrente ordinatis, puncta interſectionum eſſe in curva, quæ cum priori comprehendet ſpatium primæ figuræ duplum, adeoque cum ejus baſi [niſi hanc nova curva ſecet, ac congruo loco punctum acceptum ſit] ſpatium primo æquale. Eâdem operâ duæ ejuſmodi curvæ deſcribuntur.

tur. Eadem doctrina conversim accepta inventioni tangentium deservire poterit. Dimensio figuræ per normam, & perpendiculum descriptæ; Spatii Cycloidis, obiter ejus tangente determinatâ, dimensio, variorumque segmentorum proportio. Segmenta ejusdem quadrabilia. Cissoidalis spatii, ejusque segmentorum mensura. Spatium à Tractoria, & ejus axe interceptum æquale quadranti radio suæ tangentis descripto. Infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum quoque infinitarum specierum, Spiralium item cujusvis generis, etiam Geometricæ dimensio expenditur. Septimi Theorematis Hugeniani demonstratio ex hac doctrina eruitur. Octavum quoque Theorema, pridem ostensum, hinc novam demonstrationem assumit.

1. AD septimum Theorema gradum facimus. Illud Hugenius his verbis proponit: *Spatium infinitum inter ordinatam, Logisticam, & asymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum est trianguli comprehensi ordinatâ, tangente ad idem ordinatæ punctum, & subtangente. Sic in eadem figura spatium infinitum post ordinatam B F duplum est trianguli B F O.* Quod quidem ex dictis *cap.* 4 *num.* 6. evidenter deducitur; rectangulum enim subtangentis, seu parametri F O in ordinatam B F, quod loco citato ostensum est spatio infinito post B F exporrecto æquale, utique duplum est trianguli B F O ejusdem basis, & altitudinis; sed aliam nihilominus demonstrationem adjiciemus ad pleniorem scientiam, & methodi varietatem, aliis detegendis veritatibus inservientem, utì ex his, quæ speciminum loco subjungemus, prudens Lector agnoscet; Vix certè figura ulla notæ hactenus descriptionis est, cujus dimensio ex fonte jam aperiendo non elegantissimè promanet: immo & infinitorum solidorum mensura hinc elici potest, ut patebit *capite sequenti num.* 7., & TAB. XI. Fig. 7.

& distantia centri gravitatis variarum figurarum, ut *cap.* 11. *num.* 6. constabit.

TAB. XV. Fig. 6. 2. Sit curva quævis ADC circa axem BN, & ex quibusvis curvæ punctis A, *a*, ductis tangentibus AB, *ab*, quæ cum axe conveniant in punctis B, *b*, necnon ordinatis AN, *an*, compleantur parallelogramma ANBG, *anbg* circa ipsas tangentes, velut diametros consistentia; sicque semper fiat, ut per omnium parallelogrammorum angulos exteriores, ideſt per puncta G, *g*, transeat curva G*g*: comprehendet hæc cum priori curva A*a*C, & latere extimi parallelogrammi AG, spatium C*a*AG*g* æquale figuræ priùs positæ C*a*AN; sumptâ enim quantumlibet parvâ tangentis particulâ AD, *ad*, ac per D, *d* ductis axi, & basi parallelis MDH, EDF, *mdh*, *edf*, erunt rectangula GD, DN, *gd*, *dn*, utpote complementa parallelogrammorum circa diametrum, invicem æqualia, (potes & utrinque addere AD, *ad*, ut compares æqualia parallelogramma AH, NF, aut *ah*, *nf*; potes insuper directum parallelogrammum AH, *ah* in 7. figura commutare in obliquius intra easdem parallelas eidem nihilominus tangenti impositum, spatio autem CAG*g* melius adjacens ad evidentiorem circumscriptionem) & hoc semper in quolibet puncto eveniet; ergo cùm in utroque spatio hæc indefinitè parvæ latitudinis parallelogramma possint ab iis deficere, si inscripta sumantur, aut eadem spatia excedere, si circumscripta comparentur, minori defectu, aut excessu quolibet dato; constat ipsamet spatia C*a*AG*g*, C*a*AN integrè, & particulatim; ideſt, tum tota, tum eorum correspondentes partes invicem comparando, prorsus æqualia esse. Immo inde inferre potes, quòd, cùm totum parallelogrammum NG trianguli NBA sit duplum, & complexum ex utraque figura *g*GA*a*C, & C*a*AN duplum solius C*a*AN, reliqua figura BG*g*C dupla erit trili-

nei

nei CAB, curva CA, tangente AB, & axis portione, quam tangens intercipit, comprehensi; id quod expeditæ multarum figurarum dimensioni conducere potest.

3. Hinc si in qualibet figura CAN, ductis ubilibet axi parallelis, primùm AG æquali subtangenti NB extimi puncti A; tum *aro*, *aro*, resectis ultra ordinatam AN ipsis *ro*, *ro* respectivè æquantibus longitudinem subtangentis *nb*, *nb* ad suum punctum *a* pertinentibus, quousque compleatur figura *oo*GAN; vel etiam, (quod in idem recidit) si per N punctum regula quædam NG converti concipiatur, secans axi figuræ parallelas *ar*, *ar* productas in punctis *oo*, ita ut eadem regula NG, sive N*o* semper parallela existat tangenti AB, aut *ab*, sintque BAGN, *bao*N parallelogramma (quomodo rursus *ro* æqualis erit respectivæ *nb*, auferendo scilicet ex æqualibus *ao*, *b*N, æquales *ar*, *n*N), ex utraque, inquam, hac descriptione colligitur, figuram *oo*GAN æqualem fore prius datæ figuræ CAN, quemadmodum & partes correspondentes *r*AG*o*, *na*AN semper æquales esse; quid enim hoc aliud est, quàm ipsas lineas AG, *ag*, *num. præced.* consideratas, directè deprimere in AG, *ro*, ut jam non ad curvam, sed ad respectiva basis AN puncta terminentur? Spatium igitur C*a*AG*g*, servatâ singularum suarum linearum æqualitate, protrusum in N*oo*GA, erit, ut prius, æquale ipsi CAN, nisi malis & hìc sumere infinitè parvam tangentis portionem, ferè cum curva A*a* coincidentem, & ex proportionalitate BN, seu GA ad *ra*, cum NA ad A*r*, inferre æqualitatem rectangulorum GA*r*, & AN*n*, ac similiter in reliquis, ut supra. TAB. XII. Fig. 4. 5.

4. Vel etiam sumptâ infinitè parvâ tangentis, aut curvæ portione A*a*, junctisque ad N radiis AN, *a*N, *a*N, ostendetur semper parallelogrammum GA*a* duplum trianguli NA*a*, utpote eidem basi A*a*, inter easdem parallelas A*a*, NG (aut *aa*, N*o*) insistentis, quare

tota figura C*a*AG*oo*N totius CAN dupla erit, & dividendo spatium *oo*GAN ipsi CAN æquale erit; eo modo quo & in his bilineis curva, & recta comprehensis, velut *aa*A, aut N*a*A, accepto puncto N, sive in extremo basis, sive alibi, aut etiam intra figuram, & per N transeunte recta N*o*, quæ tangentibus *ad* perpetuò parallela existens, secet ipsas *ar*, ad basim NA ordinatas, in punctis *o*, erit N*oo*A*a*N dupla trilinei, seu bilinei (prout integra sumitur, aut ejus pars ramis N*a* intercepta) N*a*A, propter parallelogrammum *daob* ubique duplum trianguli *da*N; unde mirum, quot figuræ dimensionem accipiant.

TAB XI. Fig. 5. 6.

5. Immo eâdem operâ possent duæ figuræ eidem datæ æquales constitui, si nempe regula mobilis per punctum N utrinque extendatur, ut occurrat ambis coordinatis ex eodem puncto, scilicet non tantùm ipsi *ar* axi parallelæ, sed & *an* parallelæ basi in punctis O *o*; habebitur enim eâdem ratione figura CNO*o*, tum priori CAN, tum eidem collaterali GONA integrè, & particulatim (idest quò ad totum, & quò ad partes proportionales) prorsus æqualis; sicut viceversa, ubi figura CNO, vel etiam GONA alteri adjacenti CAN integrè, & particulatim modo præscripto æqualis fuerit, ducta *ab* ramo NO parallela tanget curvam A*ac* in *a*; si enim ita non sit, alia igitur, quàm NO, parallela erit tangenti *ab*, unde alia figura, quàm CNO*o*, fiet particulatim, & integrè æqualis ipsi A*a*CN, adeoque & ipsi primæ CNO, vel GONA; quod inferret æqualitatem totius cum parte; multarum igitur curvarum tangentes hac methodo determinabis; cave tamen partium ordinem hactenus indicatum adamussim observes, in lubrico enim, si quidquam immutaveris, te fore prævideo. Placet autem compendii causa figuras hactenus descriptas *invicem Correlatas* appellare.

TAB. XIII. Fig. 1. 2.

6. Quoniam verò tangentium alias methodos dedimus,

mus, in negotio dumtaxat dimensionis figurarum paullò diutius immorabimus, cujus ex hac methodo specimina benè multa obvia sunt. Proponatur primò figura N*oo*, cujus olim hanc genesim excogitaveram ad circuli quadraturam promovendam. Norma ex regulis CN, NA ad angulum rectum CNA compositis in plano verticali circa punctum N ita convertatur, ut brachium NC determinatæ longitudinis existens, extremo suo C peripheriam quadrantis circularis C*aa*A describat, brachium verò indefinitè extensum NA infra horizontem versùs S inclinetur, secèturque in *o* à filo *ao*, pondere T perpendiculariter descendente extenso, atque extremo regulæ NC, sive N*a* alligato; itaque angulus *a*N*o* semper rectus erit; sed & ducta circuli tangente *ab* rectus est N*ab*; æquidistat igitur N*o* tangenti *ab*; estque N*oo* figura quadranti Correlata; & ideo spatium curva N*oo*, radio NA, & asymptoto AS interjectum æquale erit circulari quadranti CAN, ejusque partes N*or*, semisegmentis arcu C*a*, ejusque sinu recto, & verso comprehensis, æquales erunt, & zonæ *orro* zonis arcu *aa*, ordinatisque ad axem NC interjectis æquabuntur, & interminata spatia *oor*AS, spatiis arcu A*a*, radio AN, & sinu arcus *a*C determinatis; præterea sectores convexi NC*a*, cavis sectoribus N*ao* æquales erunt, & portiones, curva N*o*, ejusque subtensa N*o* comprehensæ, trilineis arcu *ac*, ejusque tangente, & intercepta axis portione definitis æquabuntur, & arcus C*a* ad ejus sinum, sive ad N*r*, erit perpetuò, ut spatium N*oa*C ad rectangulum CN*r*, aut AN*r*, &c. Tangentem poscis ad quodlibet punctum *o*? divide bifariam N*o*; ex puncto divisionis ad punctum *a* junge rectam, quæ secabit N*r* in aliquo puncto; hinc juncta ad *o* tanget. Unde habetur, tangentem *ab* quadrantis NCA, productam usque ad radium NA, simul cum sinu *ar*, seu linea *or* ordinata Correlatæ N*oo*, & ramo

TAB. XII. Fig. 2.

mo N*o*, ac tangente, quam supra determinavimus ad punctum Correlatæ *o*, ipsum radium NA, usque ad occursum tangentis *ba* protensum, secare in harmonica proportione; seu abscissam N*r* ad subtangentem, quæ correspondet puncto *o*, & ordinatæ *or*, esse, ut *oa* cum *ar* ad ipsam *ar*. Eandem lineam ab aliis postmodum descriptam inveni posita N*o* æquali abscissæ AS, sine relatione ad circulum.

TAB. XIV. Fig. 10. 7. Spatii Cycloidalis dimensio hinc etiam profluit; esto enim Cyclois A*a*O, cum circumscripto parallelogrammo DN, ac per punctum N perpetuò feratur recta NO, parallela existens tangentibus Cycloidis *ab*, & occurrens ordinatis trilinei Cycloidalis, nempe ipsis *an* productis in *o*. Constat, figuram Correlatam, inde provenientem, N*oo*, fore ipsummet semicirculum genitorem Cycloidis, quippe cujus chordis N*o* parallelæ sint dictæ tangentes Cycloidis, ut dudum Geometris innotuit, ac Torricellius indicavit, potestque ex generali nostra de tangentibus ex motuum compositione determinandis doctrina, *cap.* 5. tradita, sic paucis deduci.
TAB. XIV. Fig. 9. Gignitur Cyclois ex duplici motu, utroque æquabili, & æquè veloci, altero per basim OD, cujus directio in puncto *a* est *ad*, altero per arcum semicirculi, cujus directio est tangens *d*B; hac igitur posita æquali lineæ *da*, seu ipsi arcui *d*A, juncta B*a* erit tangens, utpote diameter Rhombi laterum æqualium *ad*, *d*B, adeoque in qua est directio motus ex duobus æquè velocibus per latera *ad*, *d*B compositi; verùm quia tam angulus C*d*A simul cum A*d*B, quàm angulus CA*d*, simul cum A*dr* rectum constituunt, estque C*d*A æqualis CA*d*, etiam B*d*A ipsi A*dr* æquabitur; duplus est igitur B*dr* ipsius A*d*B; sed & duplus unius ex æqualibus internis *d*B*a*; itaque anguli *d*B*a*, B*d*A sunt æquales, sed & alterni; æquidistat igitur tangens *a*B chordæ circuli genitoris A*d*. Quoniam igitur præscripta figura N*oo* est semicircu-

circulus genitor, atque ex ea, quam nunc illustramus, doctrina, æqualis est integrè, & particulatim trilineo OaAN, hoc sublato ex parallelogrammo NADO, quod ejusdem semicirculi, ex Archimedeis doctrinis, sive utì & nos in Vivianeis ostendimus ad *Pr.* 36. *Cor.* 1. est quadruplum, residuum spatium semicycloidis OaAD triplum erit semicirculi genitoris. Sed & partium cavæ cycloidis, duabus tangentibus, & curva comprehensarum dimensio innotescet; putà spatium A*ba* semper æquale erit portioni circulari, arcu A*d*, ejusque chorda comprehensi, eò quòd spatium A*dr* spatio, *vide fig.* 9. A*ai*, & triangulum A*dr* triangulo *iba* sit æquale. TAB. XIV. Fig. 10.

8. Sed & spatia trilinearia, *redi ad fig.* 10. *ad* A*a*, arcu circuli *d*A, curva A*a*, & ordinata *da* comprehensa, dupla semper esse convincentur segmentorum cycloidis, curva A*a*, & subtensa A*a* comprehensorum; siquidem tota parallelogramma *d*A*ba* dupla sunt integrorum triangulorum *a*A*b*; sed segmenta cava cycloidis *a*A*b*, simul cum segmentis circularibus A*d* duplum efficiunt solius cavi cycloidalis segmenti *a*A*b*; igitur reliqua trilinea *ad*A dupla erunt residuorum segmentorum convexorum cycloidis A*a*; unde & zonæ *adda* duplæ erunt sectorum cycloidalium *a*A*a*, duabus subtensis, & curva *aa* comprehensorum. Hinc si ordinata *ad* esset ad semissem altitudinis cycloidis, sive per centrum C circuli genitoris transiret, quoniam tunc trilineum A*da* quadrabile foret, utpote æquale ungulæ, seu figuræ sinuum quadrantis, ad cujus arcum applicaretur, idest æquale quadrato radii C*d*; tunc, inquam, segmentum convexum cycloidis *a*A quadrabile pariter foret, (Leibnitio etiam id demonstrante) nempe æquale semissi quadrati radii; quòd si ordinata *adr* sit ad quartam altitudinis partem, ita ut A*r* sit æqualis semissi radii AC, quia sector circularis *d*AC duplus erit trian-

trianguli *adA* (quippe in æqualibus basibus *dA*, *da* ad altitudinem CA duplam ipsius A*r*) & trilineum cycloidale *dAa*, ex nuper dictis, duplum est segmenti convexi cycloidis A*a*, erit tota figura *a*AC*da* dupla segmenti *a*A*d*, chorda A*d*, curva A*a*, & ordinatæ portione *ad* contenti; igitur dividendo, triangulum æquilaterum *d*A*c* æquale erit huic ipsi segmento; quod proinde quadrabile erit; unde & quadrabile, quod additione trianguli *d*A*r* conficitur, semisegmentum *a*A*r*, ejusque duplum in integra cycloide, æquale nimirum æquilatero triangulo, quod genitori circulo inscribitur, utì Hugenio jam pridem innotuit; sed & cycloidalia segmenta, quorum subtensæ puncta conjungunt, alterum à tangente verticis, alterum ab ordinata per centrum circuli, æquè distantia, facilem quadraturam admittunt, sive ad easdem, sive ad diversas partes puncta jungantur, & zonæ binis ejusmodi subtensis interjectæ pariter quadrabiles inveniuntur, & segmenta, tum cycloidis, tum semicirculi genitoris, abscissa chordis, quarum extrema à verticis tangente, & à basi æquè dissita sint ad easdem partes, æqualia ostenduntur, ubi verò ad partes contrarias, æqualia semicirculo, simul cum rectangulo diametri in sinum arcus respondentis, &c. in quibus immorari non vacat, quippe ad alia pergendum.

9. Quod etiam demonstravit olim Hugenius, spatium Cissoide Dioclea ultra quadrantem continuata, ejusque asymptoto, & circuli genitoris diametro interceptum, triplum esse semicirculi genitoris, facillimè ex nostra hac methodo deducitur, illud, ejusque singulas partes, cum cycloide, & ejus portionibus comparando. Sit enim semicyclois ACN, cujus semicirculus genitor A*d*N, ex quo etiam genita intelligatur Cissois N*oo*. Juncta subtensa qualibet N*o*, atque ordinatis, ut in figura, patet junctam N*d* esse ipsi N*o* perpendicularem, propter *dr*, *r*N, *ro* continuè proportionales; æquidistat

TAB. XII. Fig. 3.

distat igitur ipsa N*o* chordæ A*d*, atque adeò & tangenti cycloidis *ab*; quod cùm semper eveniat, sequitur totum spatium infinitè longum *o*NAO toti semicycloidi, & ejus singulas partes N*or* ipsis portionibus C*an*, & *orro* ipsi *naan* perpetuò adæquari; juncto autem cissoidi semicirculo A*d*N, totum spatium *oo*N*dd*AO semicirculi esse quadruplum, & partes *o*N*d* quadruplas segmenti N*d*, arcu scilicet, ac chordâ his litteris designatâ comprehensi, aut sectores diametro AN, curvæ portione N*o*, junctisque ex A ad *o* chordis A*o* interjectos, eorumdem segmentorum circularium N*d* esse triplos, &c.

Si curva A*ac* fuerit Tractoria, qualem *cap.* 5. sub finem *num.* 2. descripsimus, cujus nimirum tangens *ab* ejusdem ubique est longitudinis, utique ei Correlata figura *oo*G erit circuli quadrans, centro N, radio NA, quippe NO tangenti parallela, erit ubique æqualis, unde infinitum spatium à Tractoria, ejusque Asymptoto conclusum, quadranti circulari, radio tangentis descripto, æquale demonstrabitur, & partes proportionales segmentis congruis respondebunt. TAB. XIII. Fig. 2.

10. Quid de parabolarum infinitis speciebus addam? Sanè, resumpta figura *numeri* 2. *hujus Capitis*, constat, spatium A*a*C*g*G esse duplicatum trilineum parabolicum ACΦ, posito quòd ipsa CAN sit parabola quadratica, in qua subtangentes NB, sive iis æquales AG, duplæ sunt abscissarum NC, seu AΦ; itaque parabola ACN, utpote æqualis spatio A*a*C*g*G, erit dupla trilinei ACΦ, sui nimirum complementi ad parallelogrammum circumscriptum, adeòque æqualis erit $\frac{2}{3}$ ejusdem circumscripti parallelogrammi; ubi autem subtangens NB abscissæ NC tripla fuerit (utì accidit in parabola cubica, seu in curva, cujus ordinatarum NA, *na* cubi fuerint, ut partes axis NC, *n*C à vertice abscissæ) erit, eadem ratione, figura A*a*CG, adeòque TAB. XV. Fig. 6.

& ipsa parabola CAN, tripla trilinei CAΦ, & consequenter æqualis ⅔ circumscripti parallelogrammi; ac generaliter habebit cujusvis speciei parabola ad trilineum, seu complementum parallelogrammi ipsum circumscribentis, eandem semper rationem, quam exponens potestatis suarum ordinatarum ad exponentem potestatum axis; ideft in quadratica, ut 2 ad 1., in cubica, ut 3 ad 1., in quadratoquadratica, ut 4 ad 1. &c. In ea, in qua cubi ordinatarum fuerint, ut quadrata abscissarum, ut 3 ad 2., & in qua quadratoquadrata ordinatarum sint, ut cubi partium axis, ut 4 ad 3, &c. quippe in hac ipsa ratione erunt semper subtangentes, conflantes figuram ACG parabolæ æqualem, ad abscissas conflantes dictum trilineum, ut dudum Geometris innotuit, potestque deduci ex generali tangentium constructione, *cap.* 5. præsertim *num.* 4. & sequentibus, ad parabolas applicata.

TAB. XI. Fig. 9. 11. Eodem planè modo infinitas hyperbolas ad mensuram vocabis: Ac primò, spatium Apolloniana hyperbola, ejusque asymptoto conclusum infinitum esse, sic patebit: esto talis hyperbola A*a*C, cujus asymptoti ΦD, DB; manifestum est, subtangentes BN æquales esse distantiis à centro ND; unde factâ, juxta præscriptum *num.* 2., figurâ *g*GA*a*C, erit perpetuò GA æqualis AΦ, *ga* æqualis *af*, &c. & spatium *g*GA*a*C æquale spatio C*a*AΦD*b*; sed & idem æquale C*a*AN*b*; spatia igitur C*a*AΦD*b*, & C*a*AN*b* sunt æqualia; sed primum excedit secundum parallelogrammo NAΦD; ergo oportet utraque infinita esse; ex finitis enim, quod alterum superat spatio finito, non est illi æquale, sed tantùm in infinitis hoc locum habet; postea curva A*a*C supponatur esse hyperbola secundi gradus, in qua videlicet ordinatarum AΦ, *af* quadrata reciprocè sunt inter se, ut partes asymptoti *f*D, DΦ; manifestum est, ex dictis *cap. præcedenti num.* 9., distantias à centro DN,

DN, duplas fore ſubtangentium NB; itaque, cùm ſemper in hoc caſu ΦA ſit dupla AG, *fa* dupla *ag*, tota figura *b*DΦA*a*C dupla erit ipſius *g*GA*a*C, adeòque dupla ſpatii huic æqualis C*a*AN*b*; & dividendo, ſpatium infinitum C*a*AN*b* æquale parallelogrammo hyperbolæ inſcripto NAΦD. In hyperbola tertii, aut quarti gradus, propter diſtantias à centro triplas, & quadruplas ſubtangentium, colligetur, ſpatium C*a*AN*b* eſſe ſemiſſem, aut trientem, &c. parallelogrammi DA; & generaliter eſſe illud ſpatium ad hoc parallelogrammorum, ut exponens diſtantiarum à centro ΦD, ad exponentem ordinatarum ΦA, diminutum exponente earumdem diſtantiarum; ſeu ſi exponens diſtantiarum ſit *y*, ordinatarum *x*, ut *y* ad *x-y*, ſcilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 0.; in ſecunda, ut 1 ad 1.; in tertia, ut 1 ad 2. &c. in ea, in qua diſtantiarum quadrata eſſent, ut cubi ordinatarum, ut 2 ad 1. &c.

12. Spirales verò, aut quæ harum inſtar generari concipiuntur figuræ, numquid ad hujus methodi, & doctrinæ legibus excludentur? immò & ipſæ illius influxum in ſe derivare poterunt, ſed ſuæ naturæ contemperatum; figura enim, ex ſubtangentibus ad reſpectiva puncta radii applicatis, non quidem æqualis, ſed dupla ſemper erit Spiralis figuræ ſibi correſpondentis, eò quòd harum figurarum elementa non ſint parallela, & parallelogrammis analoga, ſed convergentia, & triangulis parallelogrammorum ſubduplis reſpondentia. Exempli gratia, in Spirali Archimedea ad quemvis radium AC, vel *a*C ducta ex centro perpendiculari CB, aut C*b* æquali peripheriæ radii CA, aut reſpectivè arcui *a*I, qualem radius aſſumpto puncto A, vel *a* in ſui converſione eò uſque deſcripſit, patet ex Archimede, immò & ex dictis *cap.* 5. *num.* 9., junctam BA, ſeu *ba* tangentem eſſe; puncto igitur D, ſeu *d* aſſumpto, quod contactui quàm proxi-

TAB. XV. Fig. 3.

proximum ſit, completiſque parallelogrammis DG, DC, ſeu *dg*, *dc* æqualibus, utpote complementis parallelogrammorum circa diametrum, patet, junctis DC, *dc*, triangula CDA, C*da* eſſe ſemiſſem æquè altorum, & eamdem baſim obtinentium parallelogrammorum CAFE, C*afe*; quare & ſemiſſis erunt æqualium illis parallelogrammorum MAGH, *magh*; cùmque hæc triangula excedere poſſint Spirale ſpatium CA*a*C minori exceſſu quolibet dato, conſtat ipſum integrum Spirale ſpatium omnium ejuſmodi parallelogrammorum MG, *mg*, ad minimam latitudinem redactorum, & in unam figuram confluentium (quod fit, ipſis lineis AG, *ag* ad reſpectiva puncta ejuſdem radii CA in eadem à centro diſtantia applicatis, ſcilicet AG in AK, *ag* in IL, exiſtente CI æquali ipſi C*a*, & ſic ubique, quòuſque compleatur figura CLKA, quæ in hoc caſu erit trilineum parabolicum, eò quòd ſubtangentes, quemadmodum & arcus, quibus æquantur, in duplicata radiorum ratione procedunt, ut monuimus *eodem cap.* 5. *num.* 9.) ſubduplum eſſe; atque adeò, cùm tale trilineum CKA, duplum ſpiralis ſpatii, conſtet, ex dimenſione parabolæ, eſſe duos trientes trianguli ſub radio CA ut altitudine, & AK ut baſi, ideſt duos trientes circuli radio CA, aut correſpondentis ſectoris radio aC, vel CI deſcripti, & ipſum Spirale ſpatium circumſcribentis, habetur, ſpiralia ſpatia trientem eſſe circularium ſectorum eadem circumſcribentium. Similiter aliarum ſpecierum ſpiralia ſpatia per correſpondentia trilinea parabolica, *cap.* 5. *citat.* indicata, metiri poteris, & cum ſectoribus circumſcriptis comparare; ſed & Spiralem Geometricam, ſeu Logarithmicam A*aa* invenies comprehendere, poſt infinitos ſibi ſuperimpoſitos cincinnos, cum radio CA ſpatium ſubduplum circumſcripti trianguli ABC; figura enim CLKA ex ſubtangentibus ad congrua radii puncta applicatis hìc in triangulum degenerat, quia ob æqua-

TAB. XV. Fig. 8. 10.

æqualem ſemper inclinationis angulum C A B, C *ab*, triangula rectangula C A B, C *ab* ſimilia evadunt, & ſubtangentes C B, C *b*, ſeu his æquales A K, I L, in eadem radiorum A C, C *a*, vel C I ratione; Unde habes confirmationem eorum, quæ *cap. præced. num.* 10. & 11., circa hujus ſpatii comparationem, attulimus.

13. Hanc igitur tot exemplis illuſtrem doctrinam ad propoſitum applicantes, ſeptimum Hugenii Theorema ſic demonſtrabimus. Subtangentes Logiſticæ A *a a* C ſint N B, *nb*, *nb*, quæ ad reſpectiva puncta A, *r*, *r* applicatæ A N referantur in A G, *ro*, *ro*; eſt igitur figura N A G *o* O æqualis ſpatio poſt ordinatam A N, aſymptoto, & curvæ interjecto, juxta hanc doctrinam; verùm & idem ſpatium N A G convincitur eſſe rectangulum ſubtangentis N B in ordinatam N A, eò quòd, ex dictis *cap.* 5., ſubtangentis longitudo N B, *nb*, ſive jam A G, *ro*, ſit ſemper eadem; itaque ſpatium infinitum, quod poſt quamvis Logiſticæ ordinatam exporrigitur, æquale eſt rectangulo ſub eadem ordinata, & ſubtangente, atque adeò eſt duplum trianguli ejuſdem baſis, & altitudinis, quod, ordinata tangente & ſubtangente, comprehenditur, utì Clariſſimus Auctor in hoc Theoremate nobis demonſtrandum propoſuit. TAB. XII. Fig. 4.

14. Sed & ſequens Theorema octavum, videlicet, quòd *ſpatium duabus ordinatis interjectum æquale eſt rectangulo ſubtangentis in differentiam earumdem ordinatarum, utì in ſequenti figura ſpatium AD F B æquatur rectangulo ſubtangentis FO in KA*, quod quidem *cap.* 4. *num.* 4. ſatis oſtenſum eſt, atque ex iis, quæ aliàs diximus, facilè oſtendi poteſt, ex hac ipſa doctrina iterum ex abundanti demonſtrari poteſt, quippe in figura paragraphi antecedentis, nedum totum ſpatium infinitum C A N B toti rectangulo N A G O probatur æquale, ſed & ejus pars quælibet N A *an* parti correſpondenti A *ro* G, ex ſubtangentibus curvæ A *a* ad ipſam TAB. XI. Fig. 7.

ipsam A*r* applicatis genitæ, quæ est rectangulum subtangentis in differentiam ordinatarum; nec juvat amplius hìc immorari. Ad solida transeamus.

CAPUT IX.

Prima Noni Theorematis demonstratio. Hinc solida omnia ex infinitis Logisticæ spatiis esse ostenduntur, ut quadrata radiorum basis, & portiones, ut differentiæ quadratorum à radiis extremis. Alia Logistica in duplicata ordinatarum prioris ratione spatium comprehendit prioris subduplum, item subtangentem subduplam habet: generaliter quæcumque fuerit Logistica, ejus spatium, & subtangentes, tam submultiplex erit prioris, quàm submultiplicata ordinatarum ratio. Idem nonum Theorema secundò demonstratur. In Correlatis figuris solidum ab exteriori duplum semper est solidi, quod ab interiori circa axem revoluta describitur, & partes partium respondentium. Hinc tertia ejusdem Theorematis demonstratio. Dimensio solidi ex figura quadranti correlata, ejusve partibus tum concavis, tum convexis, item solidorum ex trilineo cycloidis, ipsave semicycloide circa tangentem verticis revoluta, ejusque partium. Solidorum quoque ex spatio Cissoidis concavo, aut convexo, tum circa asymptoton, tum circa ei parallela ex vertice. Conoidum ex infinitis parabolis ad circumscriptos cylindros, vel conos, item solidorum ab infinitis hyperbolis ratio ad inscriptos cylindros nota.

1. IN hoc nono Theoremate ita pronunciat Hugenius: *Solidum*, inquit, *productum ab infinito spatio post aliquam ordinatam in conversione circa asymptoton est sesquialterum Coni, cujus altitudo æquetur subtangenti, & basis semidiameter æqualis sit ordinatæ: ita solidum pro-*

du-

ductum ab infinito spatio BFOI in conversione circa FO, sesquialterum est Coni geniti ex triangulo BFO circa eamdem FO revoluto. Hujus prima demonstratio sic institui potest. Intelligantur huic solido circumscripti innumeri cylindri FM, QR, PS, &c. æqualis ubique altitudinis FQ, QP, PT, &c. indefinitè exiguæ, itaut horum cylindrorum congeries pro ipso rotundo solido sumi queat, & tangentis OB portiuncula primo cylindro FM intercepta ferè cum ipsa curva BN coincidat, seu ad ipsam obtineat rationem minorem qualibet inæqualitatis majoris ratione assignabili, (hoc enim ex vulgatis methodis fieri potest) designetur etiam OH æqualis subtangenti OF. TAB. XIV. Fig. 7.

2. Jam sic: Hæc series cylindrorum, qui inter se sunt, ut basium FB, QN, PV, continuè proportionalium quadrata, est quædam Geometrica progressio solidorum proportionalium in infinitum continuata; igitur ex demonsttationibus, sive Cavallerii, sive Torricelli, sive Gregorii à S. Vincentio, omnium terminorum aggregatum (idest rotundum solidum, de quo loquimur) erit ad primum terminum, (scilicet ad cylindrum MF) ut ipse primus terminus ad primam differentiam, hoc est, ut quadratum FB ad ejusdem differentiam, à quadrato QN, vel ut quadratum FO ad rectangulum HQF, quo differt ipsum quadratum FO ab OQ ex vi constructionis, & hypothesis præmissæ. Cùm ergo ratio solidi rotundi ad inscriptum conum, ex triangulo BOF genitum, componatur ex ratione talis solidi ad primum cylindrum FM, & ex ratione ejusdem cylindri FM ad conum FBO, quarum prima, ex dictis, est eadem, quæ OF quadrati ad rectangulum HQF, secunda verò eadem est, quæ QF ad trientem altitudinis OF propositi coni, aut rectanguli HQF ad HQ in trientem altitudinis OF, ideo erit solidum rotundum Logisticæ ad prædictumconum, ut quadratum OF

OF ad rectangulum HQ in trientem OF, nempe in composita ratione ex OF ad QH, (quæ est ratio subsubdupla, propterea quòd HQ differat ab HF differentia QF indefinitè parva, & re ad minimos cylindros redacta, penitus evanescente) & OF ad trientem sui, quæ est ratio tripla; ex his autem composita ratio est sesquialtera, ut patet in his numeris 3, 6, 2; itaque solidum ex Logistica circa axem FO revoluta sesquialterum est Coni ex inscripto, & per tangentem determinato triangulo FBO. Quod erat demonstrandum.

TAB. XI. Fig. 8. 3. Hinc nullo negotio deducitur, rotundum solidum à spatio post AB infinito, ad solidum rotundum à spatio item infinito post aliam ordinatam CV, ad invicem esse, ut quadrata BA, CV, quippe & horum solidorum subsesquialteræ magnitudines, nempe inscripti coni, ob eamdem altitudinem subtangentis, sunt ad invicem, ut quadrata radiorum basis; necnon solida ex portionibus AVCB, BADQ, esse ad invicem, ut differentias quadratorum AB, CV, & AB, QD, sive, ut armillas circulares ab VE, & DK circa BQ revolutis descriptas, vel hæc solida ad invicem esse, ut respondentia spatia geometricæ spiralis, per hujus Logisticæ convolutionem, axe BC in punctum contracto, provenientia; quæ omnia, etiam argumentis *cap.* 3. adductis in demonstratione primi Theorematis, confirmari potuissent, intellectis nimirum loco parallelogrammorum B*z*, *xz*, &c. totidem cylindris, eademque prorsus demonstratione applicata.

TAB. XII. Fig. 6. 4. Nobis aliam hujus veritatis demonstrationem meditantibus illud ostendendum occurrit, quòd, si intra Logisticam BCA describatur ad eamdem asymptoton, eamdemque ordinatam FB alia Logistica BNM, cujus ordinatæ sint, ut quadrata prioris Logisticæ, faciendo nimirum ubique, ut FB ad DC, ita DC ad DN, & ut FB ad EA, ita EA ad EM, &c. spatium à Lo-

Logiſtica FBNM comprehenſum ſubduplum erit ſpatii à Logiſtica FBCA comprehenſi; ſumpta enim quavis ordinata DNC, ac poſita EF dupla FD, ordinetur EMA; eſt igitur in priori Logiſtica FB ad DC, ut DC ad EA; ſed etiam ex conſtructione, ita DC ad DN ordinatam poſterioris Logiſticæ, æquales ſunt igitur DN, & EA, & hoc ſemper; ordinantur autem EA in ſpatio FBCA ad altitudinem EF, ſemper duplam altitudinis FD interceptæ ab æquali ordinata DN in ſpatio FBNM; igitur, ex Propoſit. 1. noſtræ Appendicis ad Demonſtr. Vivian. Probl., erit ſpatium FBCA duplum ipſius FBNM. Q. e. d.

5. Colliges ſpatium FBNM æquale eſſe triangulo FBO per tangentem prioris Logiſticæ BO determinato, ſiquidem & hujus duplum eſt, ex Theoremate ſeptimo Hugeniano, idem ſpatium FBCA; necnon evidens eſt, ſubtangentem Logiſticæ poſterioris FBNM fore ſemiſſem ipſius OF, quippe ejus rectangulum in FB æquale foret ſpatio FBNM, uti & prædicto triangulo; immò generaliter, quàm ſubmultiplicata fuerit ratio ipſarum DN, DC, rationis DN, FB, tam ſubmultiplex fore ſpatium à Logiſtica BNM comprehenſum ſpatii comprehenſi ab ipſa BCA, & tam ſubmultiplices pariter fore ſubtangentes hujus, ſubtangentium illius.

6. Ut altera igitur propoſiti Theorematis demonſtratio compleatur, triangulo OFB ad verticem O inſcriptum eſto trilineum parabolicum ORPBF, cujus ad verticem tangens OF; manifeſtum eſt, Conum ex OBF circa FO proportionaliter analogum eſſe trilineo OPBF, quippe, ut circuli, vel quadrata radiorum BF, ND, ita lineæ BF, DP; quemadmodum & ſpatium FBNM ſupra deſcriptum proportionaliter analogum eſt ſolido rotundo ex Logiſtica FBCA circa FO, eò quòd circuli, vel quadrata radiorum FB, DC, ſint ut lineæ FB, DN; ita erit igitur ſolidum ex FBCA ad Conum ex

ex FBO, quemadmodum ſpatium FBNM, ideſt, ex *præced. num.*, triangulum FBO, ad trilineum FBPO; nempe in ratione ſeſquialtera. Q. e. d.

TAB XV. Fig. 6. 7. 7. Duas alias adhuc diverſas ejuſdem Theorematis demonſtrationes afferre poſſem, ſed ne longior ſim, & alteri longè utiliori locum aperiam, hac dumtaxat contentus ero, quam tertio loco ſubjungam, atque ut Lectores patienter attendant enixiùs rogabo. Semen fœcundiſſimum eſt, unde illa pullulat, quippe illi, quod *præc. cap. num.* 2. ſevimus, atque unde tot fructus abundè collegimus, agnatum penitus, atque congeneum eſſe reperies. Sint igitur eædem Correlatæ figuræ, quas loco citato deſcripſimus, *g*GA*a*C, & NA*a*C; utraque autem circa axem NB convertatur; ajo ſolidum à ſpatio primo, & exteriori, productum duplum eſſe ſolidi à ſecundo, & interiori ſpatio, geniti; facta enim eâdem, ut priùs, conſtructione, cùm parallelogrammum NF æquale ſit ipſi MG, utroque circa NB revoluto, cylindrus ex primo erit ad tubum cylindricum genitum ex ſecundo, ut dimidia NA (quæ eſt diſtantia centri gravitatis ipſius NF ab axe motus) ad mediam arithmeticam inter MN, & AN, (quæ eſt diſtantia centri gravitatis MG ab eodem axe); hæc autem media arithmetica in parallelogrammis infinitè exiguæ latitudinis, atque adeò in ipſiſmet ſolidis, in quæ tandem deſinunt tubi illi cylindrici, punctis M, A, coincidentibus, & omni latitudine MA penitus evaneſcente, eſt ipſiſſima linea NA; itaque, cùm idem ratiocinium valeat in omnibus aliis cylindris ex *nf*, & tubis cylindricis ex *mg* in tali converſione ſpatiorum genitis, erit ſemper unuſquiſque cylindrus ſolidi ex interiori figura ad quemlibet tubum ſolidi ex figura exteriori, ut dimidia NA ad totam NA, ut dimidia *na* ad totam *na*, ſemper nimirum in ratione ſubdupla; ſolidum igitur ex interiori figura C*a*AN eſt ſemiſſis ſolidi ex

figura exteriori $gGAaC$. Quod erat demonstrandum.

8. Directè autem depressis, aut evectis lineis singulis AG, ag, ut jam non ad ipsam curvam AaC, sed ad basim NA ipsarum extrema pertingant, quemadmodum *cap. præcedenti num.* 3. monuimus, non variari figuræ quantitatem, sed eamdem esse figuram $NooGA$ hinc provenientem, ac quæ prius erat $gGAaC$, ita pariter constat, idem solidum ex ipsa $ooGAN$ circa NB revoluta proventurum, quod priùs ex $gGAaC$, propter servatam eamdem linearum AG, & Or tum longitudinem, tum distantiam ab axe motus, adeòque easdem cylindricas superficies hæc solida componentes; duplum est igitur solidum ex figura $ooGAN$, solidi ex $CaAN$ (factâ circa NB utriusque rotatione) descripti; immò & partes partium respondentium, videlicet solidum, quod ex portione Nro, duplum solidi ex Can (acceptis or, & na homologis, scilicet in idem a punctum convenientibus) & quod ex $orAG$, duplum ejus, quod ab $AanN$, ob eamdem rationem. TAB. XII. Fig. 4. 5.

9. Tertia igitur propositi Theorematis Hugeniani demonstratio sic expedietur. Esto Logistica AaC. Constat, ex dictis *cap. præced. num.* 13., ei Correlatam figuram esse parallelogrammum NAGO, quòd si circa axem Logisticæ rotetur cylindrum producet triplum coni ab inscripto triangulo NAB ejusdem basis, & paris altitudinis; cùm igitur ex ea, quam hìc adduximus, doctrinâ solidum ex Logistica circa axem sit subduplum præfati cylindri ex parallelogrammo NAG, erit solidum Logisticæ ad conum illum inscriptum in ratione composita ex subdupla, inter ipsum, & cylindrum intercedente, & ex tripla inter cylindrum, ac dictum conum repertâ; Ratio autem ex his composita (ut ad finem *num.* 2. indicavimus) est sesquialtera; quare, &c. TAB. XII. Fig. 4.

10. Sed & hinc pariter constat dimensio portionum ejusdem solidi, putà ejus, quæ à parte $naAN$ circa

 nN

*n*N rotata generatur, quippe quæ demonstretur semissis tubi cylindrici ex correspondente parallelogrammo A*ro* circa eumdem axem converso geniti, idest æqualis cylindro, basi differentia circulorum AN, N*r*, altitudine verò semisse subtangentis; indeque subtracto cylindro ab inscripto parallelogrammo *nar*, residuum æquale erit annulo ex spatio trilineari *ar*A circa axem revoluto, quod proinde notam rationem habebit, sive ad alium annulum *ar*A, sive ad tubum cylindricum ex parallelogrammo, quod sibi circumscriberetur; & hoc, *cap. 7. num.* 14., desiderabatur ad spatia quædam trilinearia Spiralis Geometricæ, tum ad invicem, tum ad circumscriptas armillarum circularium portiones comparanda, ut ex ibi dictis constat. Calculum ineat qui volet. Nobis colligendi sunt fructus ex doctrina, *num.* 7. & 8. indicata, uberrimè manantes, immò veriùs Lectoribus indicandi, ne voluptatem illos per se decerpendi eisdem invidisse videamur.

TAB. XII. Fig. 2. 11. In primis igitur in figura quadranti Correlata, *cap. præc. num.* 6. descripta, patet, nedum integrum spatium SAN*o*O circa NC revolutum, producere solidum æquale spheræ radio NA descriptæ, quippe duplum hemispherii ex conversione quadrantis CAN; sed & quarum spheræ portionum duplæ sint portiones ejusdem solidi à partibus concavis N*or* descriptæ, ac consequenter cui solido æquales conoides à convexis etiam portionibus, curva N*o*, & axe CN producto interceptis, ordinataque ex *o* ipsi *r*N parallela terminatis, & circa eumdem axem conversis, & tam facile erit, sive aliquod ex hujusmodi conoidibus, sive ex solidis à spatio concavo descriptis in data ratione dividere, quàm facile est in spheræ portionibus, & residuis cylindrorum illas circumscribentium idem præstare.

TAB. XIV. Fig. 10. 12. Cycloide O*a*AN circa tangentem verticis AN revoluta, patet solidum inde proveniens esse subduplum annuli

annuli ex semicirculo NoO circa eamdem tangentem converso: unde & residuum cylindri illi solido circumscripti, idest solidum, quod ex semicycloide convexa OaAD circa tangentem verticis conversa describitur, notæ dimensionis erit, immò & ejus partium mensura innotescet: quæ jam pridem inter Geometras magna sollicitudine quæsita fuisse video. Idem in Cissoide præstandum, cujus quidem ex nota proprietate linearum Ar, rd, rN, ro proportionalium, obvia est dimensio solidi ejus conversione circa asymptoton AO descripti, quippe uti rectangula Aro, drN æqualia inde ostenduntur, adeòque & cylindricæ superficies ab iis descriptæ, ita integrum illud Cissoidale solidum, integro annulo ex semicirculo genitore circa tangentem in N revoluto, & partes partibus correspondentibus æquari manifestum est; ex nostrà verò doctrina manifesta etiam evadit dimensio solidi ex eodem cavo cissoidali spatio ooNAO circa Nn revoluto, ejusque partium, per comparationem ad fusum Cycloidale ex CAN, ejusque partes; immò & innotescet dimensio Conoidum ex spatiis convexis, curva Noo, & axe nN producto, ac ordinata ex o ipsi rN parallela terminatis, quippe residua cylindrorum ex rectangulis Nro productorum. Solidum ex Tractoria subduplum pariter invenies hemisphaerii ex quadrante sibi correlato, &c. TAB. XII. Fig. 6.

13. In parabolis cujusvis generis CaA, Conoides, ex figura CAN circa axem CN, habebit semper ad circumscriptum cylindrum ex CΦNA rationem notam; nota quippe est ratio axis NC ad subtangentem NB, unde & ratio cylindri ex CΦNA ad cylindrum ex BGAN, quæ eadem est; cylindrus autem BGAN componitur ex solido ex CgGAN (quod semper est triplum Conoidis ex CAN, quippe solidum ex CaAGg hujus semper est duplum), & ex conoide ex CgGB, cujus ratio ad ipsum CAN eadem semper est, quæ CB TAB. XV. Fig. 6.

ad

ad CN, *cb* ad *cn*, juxta Propofit. 1. Append. noftræ Vivian. Probl., adeòque eft ad illum in quadratica, ut 1 ad 1., in cubica, ut 2 ad 1., in quadratoquadratica, ut 3 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum funt, ut quadrata ex fagittis, ut 1 ad 2, & univerfaliter fi ordinatarum exponens fit x, partium verò axis y, ut x minus y ad y; itaque femper cylindrus ex BGAN erit ad conoidem, ex parabola CAN circa axem revoluta, ut $3y + x - y$ ad y; fcilicet in quadratica, ut 4 ad 1., in cubica, ut 5 ad 1., in fequenti, ut 6 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum refpondent quadratis fagittarum, ut 7 ad 2., in qua verò quadratoquadrata refpondent cubis, ut 10 ad 3, &c. Vel fic etjam calculus inftitui poteft; quoniam cylindrus ex BGAN triplus eft coni ex triangulo BAN; folidum item ex C*g*GAN triplum Conoidis CAN; reliqua etiam Conois ex C*g*GB tripla erit folidi ex trilineo CAB; eft verò, ex dictis, Conois CAN ad Conoidem C*g*GB convertendo, ut y ad $x - y$; ergo ex æquo Conois CAN ad folidum ex trilineo CAB eft, ut y ad $\frac{x-y}{3}$, five, ut $3y$ ad $x - y$; & componendo, ac per converfionem rationis, conus BAN ad conoidem ex infcripta parabola, ut $2y + x$ ad $3y$; nempe in quadratica, ut 4 ad 3, in cubica, ut 5 ad 3, in quadratoquadratica, ut 6, ad 3, in ea, in qua cubi comparantur quadratis, ut 7 ad 6, &c.

TAB. XI. Fig. 9. 14. Non difficilior infinitarum hyperbolarum tractatio erit. Sit quævis hyperbola C*a*A inter afymptotos BDΦ; & huic correlata figura *g*G, cujus ordinatæ AG, *ag* æquales fubtangentibus NB, *nb*. Quoniam, ex dictis *cap. 7. num. 9.*, eft DN ad NB, feu ΦA ad AG perpetuò, ut exponens ordinatarum AΦ ad exponentem diftantiarum ΦD, videlicet, ut x ad y; etiam folidum ex fpatio C*a*AΦD circa DB ad folidum ex

*g*GA*a*C

$gGAaC$ circa eumdem axem, (quippe quorum cylindricæ superficies à lineis Φ A, AG, & *fa*, *ag* eamdem perpetuò rationem observant) ut x ad y; unde idem antecedens solidum, ad solidum ex $CaAN$, quod est juxta nostram doctrinam, solidi consequentis subduplum, erit ut x ad $\frac{1}{2}y$; vel ut $2x$ ad y; & dividendo, cylindrus ex inscripto parallelogrammo Φ AND ad solidum ex spatio infinitè longo $CaAN$ erit, ut $2x-y$ ad y; scilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 1 (utì jam Torricellius ostendit) in secunda, seu quadratica; ut 3 ad 1; in tertia, seu cubica, ut 5 ad 1; in quarta, seu quadratoquadratica, ut 7 ad 1; & sic semper, sumpto antecedente juxta imparium numerorum progressionem; quòd si cubi ordinatarum ad distantiarum quadrata comparentur, ratio invenietur, ut 4 ad 2, seu 2 ad 1; si quadratoquadrata illarum ad istarum cubos, ut 5 ad 3, &c. Alia exempla, aliæque speculationes non deerunt, si Lectoris industria, hisce vestigiis insistens, in feracissimos Geometriæ campos se conferet.

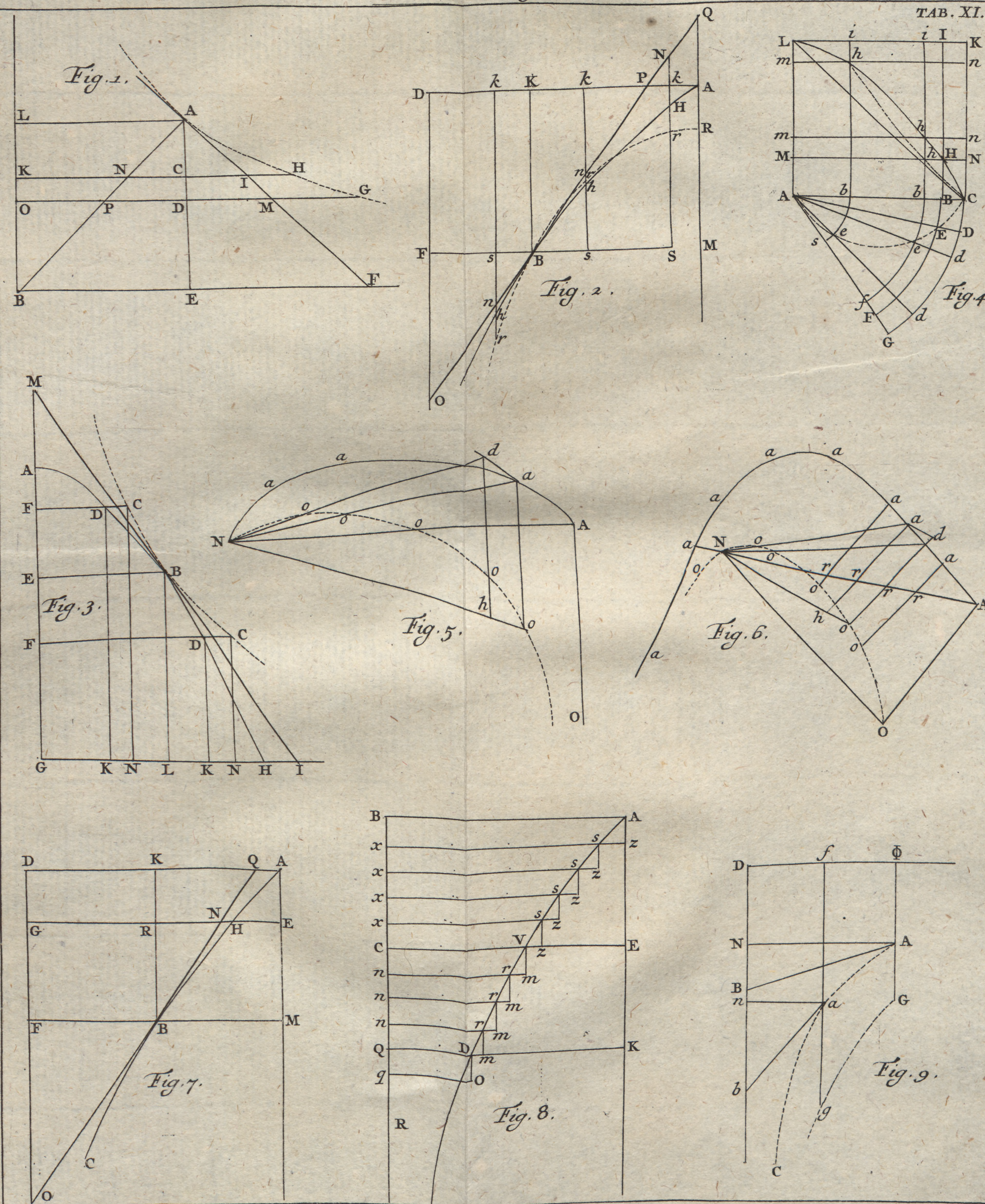
CAPUT X.

Decimum Theorema proponitur, ac prima demonstratione stabilitur. Infinita series terminorum proportionalium æquatur maximo ducto in exponentem rationis, ac diviso per eumdem exponentem unitate minutum. Ex hoc demonstrandi modo, tum finitæ, tum infinitæ series æquales ostenduntur summæ, vel differentiæ duarum potestatum, per summam, vel differentiam radicum divisæ, &c. Solidum rotundum, de quo in hoc Theoremate, per infinitæ seriei calculum ad mensuram redigitur. Subtangentes Logisticæ in ordinata acceptæ sunt, ut rectangula Logisticæ inscripta. Solidum ex quovis Logisticæ spatio circa ordinatam re-

voluto ad inscriptum cylindrum est, ut congruum trilineum ad inscriptum triangulum. Hæc ratio nota esse ostenditur. Annulis quoque latis, per hæc spatia progenitis, demonstratio applicabilis esse indicatur.

1. DEcimum Auctoris nostri Theorema inventu, fateor, difficillimum mihi fuit, duas tamen, aspirante Geometriæ Præside, ejus demonstrationes, eo, quod sequitur, medio tandem extundere potui: *Solidum*, inquit, *productum ab eodem infinito spatio in conversione circa ordinatam B F, postquam exporrigitur, sextuplum est* Coni *geniti ex triangulo B F O in conversione circa B F.* Fiat enim angulus E F H semirectus, & ordinatæ N D, M E in Logistica extendantur ad lineam F H in G, H. Concipiatur modò solidum ex triangulo H F E, (ad partes H E indefinitè protenso simul cum Logistica) in spatium Logisticæ F B M E, quod conflabitur ex totidem rectangulis G D N, H E M, &c. Aut etiam, ut in Vivianeis indicavimus ad Schol. propos. 6. pag. 51. Spatium Logisticum F B N M ita erectum, ut perpendiculare fiat plano H F E, per quod motu sibi semper parallelo fluere intelligatur, ut partes ipsius Logisticæ, lineam F H prætergredientes, deinceps evanescant, ita ut, cùm Logistica attigerit punctum G, ejus portio F D N B defecerit, solaque remanserit residua post D N versùs E M in infinitùm protensa; ubi verò attigerit punctum H, defecerit pars E F B M, solaque residua fuerit quæ post E M in infinitùm extenditur, &c. Jam constat ex prima genesi, hoc solidum fore ad rotundum ex Logistica circa ordinatam B F revoluta, ut radius cujuspiam circuli ad ejus circumferentiam; quæ enim lineæ D N, E M in solido supra descripto ducerentur in G D, H E, æquales ipsis D F, E F, in rotundo solido circa F B ducerentur in peripherias ab eisdem radiis D F, E F, descriptas

TAB. XII. Fig. 9.


TAB. XI.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.


POLITECHNIKA GDAŃSKA
BIBLIOTEKA CENTRALNA

ſcriptas in rotatione earumdem ordinatarum DN, EM. Rurſus ex ſecunda geneſi ejuſdem priùs deſcripti ſolidi, patet illud fore æquale priſmati altitudine ſubtangentis OF, baſi verò integro Logiſticæ ſpatio FBNM, ideſt, per dicta *cap.* 8. in demonſtratione Theorematis ſeptimi, baſi ipſo rectangulo OFB. Ratio eſt, quia ſolidum illud, juxta ſecundam geneſim conſideratum, habet pro baſi ſpatium FBM, & ad punctum G, ſive ad altitudinem GD, habet ſectionem baſi parallelam ſpatium infinitum poſt DN extenſum, ſicut & ad altitudinem EH ſpatium infinitum extenſum poſt EM, &c. quemadmodum & priſma, baſi ſpatio FBNM, altitudine OF, ſecari poſſet in rectangulum OFB æquale ipſi FBM, & ad diſtantiam FD (æqualem DG) ſecaretur in rectangulum ex OF in DN æquale ſpatio infinito poſt DN, necnon & ad diſtantiam EF (æqualem EH) in rectangulum ex OF in EM æquale ſpatio poſt EM infinitè protenſo, &c.

2. Ratio igitur ſolidi rotundi ex ſpatio FBME circa FB rotati ad conum ex triangulo OBF, utpote compoſita ex ratione dicti ſolidi rotundi ad priſma altitudine OF, baſi ſpatio FBM, vel rectangulo OFB, & ex ratione hujus ipſius priſmatis ad dictum conum, componetur ex ratione circumferentiæ radii OF ad radium OF, (vel, aſſumpta communi altitudine OC, dicas ex ratione cylindricæ ſuperficiei deſcriptæ ab OC ad rectangulum FOC) & ex ratione dicti priſmatis ad deſignatum conum, (ſcilicet ex compoſita rurſus ex ratione rectanguli FOC ad triangulum FOB, & ex OF altitudine priſmatis ad circumferentiam ex triente OF, quæ eſt diſtantia centri gravitatis trianguli ejuſdem ab axe motus, juxta celeberrimam regulam Guldinianam, ſeu dicas ex ratione trianguli ejuſdem OFB ad triangulum ex triente circumferentiæ ab OF deſcriptæ in ipſam FB, vel OC) hæ autem rationes componunt ratio-

 nem

nem ſextuplam; cylindrica ſiquidem ſuperficies ab OC in converſione circa FB deſcripta, (quæ eſt primus terminus) cùm tripla ſit cylindricæ ſuperficiei ejuſdem altitudinis in trientem dumtaxat peripheriæ ex OF, ſive in peripheriam trientis OF, ſextupla erit trianguli ex tali triente circumferentiæ in OC, vel FB, (quod eſt ultimus terminus) utpote ſubdupli cylindricæ ſuperficiei ejuſdem altitudinis, & baſis. Solidum igitur rotundum ex Logiſticæ ſpatio FBM circa FB revoluto, ſextuplum eſt Coni ex OFB triangulo inſcripto circa eamdem ordinatam rotato. Quod erat demonſtrandum.

3. Alia ejuſdem Theorematis demonſtratio aſſumptum hoc, jam inter Geometras pervulgatum, præſuppoſnit, quòd ſcilicet quælibet infinita ſeries terminorum continuè proportionalium æqualis eſt maximo termino ducto in exponentem rationis, & diviſo per eumdem exponentem unitate minutum; ſit, verbi gratia, communis ratio infinitorum terminorum illa, quam habet a ad 1, ſitque maximus terminus m; erunt igitur termini iſti per ordinem m, $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{aa}$, $\frac{m}{e^3}$, $\frac{m}{e^4}$, &c. in infinitùm: dico omnes ſimul æquari $\frac{ma}{a-1}$; multiplicentur enim ſinguli ex propoſitis terminis per $a-1$: fiet $ma-m$, $+m-\frac{m}{a}$, $+\frac{m}{a}-\frac{m}{aa}$, $+\frac{m}{aa}-\frac{m}{a^3}$, &c. ubi conſtat, omnes terminos poſt ma ſe mutuò elidere; qui enim priùs negantur, iidem immediatè poſt affirmantur; atque adeò omnes æquantur ſoli priori producto ma; igitur è contra, dividendo per $a-1$, fient $m+\frac{m}{a}$, $+\frac{m}{aa}+\frac{m}{a^3}+\frac{m}{a^4}$, &c. in infinitùm æquales $\frac{ma}{a-1}$; quod enim multiplicatio

confi-

conficit, hoc ipſum diviſio retexit. Vel ſic: In propoſitis terminis proportionalibus, ut una differentia ad unum terminum, (putà ut $a - 1$ ad a) ita omnes ſimul differentiæ (ideſt ipſe maximus terminus m, in quo differentiæ omnes includuntur) ad omnes terminos, qui propterea æquales eſſe debent $\frac{ma}{a-1}$. Q. e. d.

4. Priorem demonſtrandi modum, qui clarior eſt, atque, me judice, omnium facillimus, indicavi jam in Vivianeis ad finem pag. 150., atque expeditiſſimum innumeris veritatibus demonſtrandis Lector inveniet, ſi in illo ſemet tantiſper exercere non dedignetur. Exempli cauſa in ſeriebus finitis, deprehendet differentiam quarumlibet homogenearum poteſtatum, diviſam per differentiam radicum earumdem, æquari aggregato tot terminorum continuè proportionalium, uno gradu depreſſiorum, quot fuerint unitates in earum poteſtatum exponente; putà

$$\frac{aa - bb}{a - b} = a + b$$

$$\frac{a3 - b3}{a - b} = aa + ab + bb$$

$$\frac{a4 - b4}{a - b} = a3 + aab + abb + b3$$

&c.

multiplicando enim per $a - b$ terminos primæ æquationis, fit $aa - ab + ab - bb = aa - bb$, ob reliquos terminos ſe mutuò elidentes; item, multiplicando terminos æquationis ſecundæ, habetur $a3 - baa + baa - abb + abb - b3 = a3 - b3$ ob eamdem rationem; ſimiliter in aliis idem eveniet. Differentiam autem quarumlibet homogenearum poteſtatum gradus à numero pari denominati, vel ſummam gradus denominati ab impari nume-

 ro,

ro, divisam per summam radicum, æqualem deprehendes aggregato similium terminorum, ut supra, sed alternatis affirmationis, & negationis signis: verbi gratia,

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = aa - ab + bb$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - aab + abb - b^3$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + aabb - ab^3 + b^4$$

&c.

Nam multiplicando terminos per denominatorem $a + b$ fit in prima æquatione $aa + ba - ba - bb = a^2 - b^2$, in secunda æquatione fit $a^3 + baa - aab - abb + bba + b^3 = a^3 + b^3$ cæteris se elidentibus; in tertia, & quarta, aliisque infinitis idem proveniet.

5. In seriebus autem infinitis, proponatur summa quarumvis potestatum divisa per differentiam radicum; dico æquari tot terminis uno gradu depressioribus, & continuè proportionalibus, quotus est potestatum gradus, cum dupla serie infinitarum fractionum similiter proportionalium, putà $\frac{aa + bb}{a - b} = a + b + \frac{2\,bb}{a} + \frac{2\,b^3}{aa} + \frac{2\,b^4}{a^3}$ &c.

Hos quippe multiplicando per $a - b$, habes

$$aa - ba + ba - bb + 2bb - \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^3}{a} - \frac{2b^4}{aa} + \frac{2b^4}{aa} \text{ \&c.}$$

ubi,

ubi, retractis iis, qui se elidunt, remanet $aa+bb$. Similiter

$$\frac{a^3+b^3}{a-b} = aa+ab+bb+\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^4}{aa}+\frac{2b^5}{a^3} \&c.$$

hos enim multiplicando per $a-b$ fiet

$$a^3-baa+baa-abb+abb-b^3+2b^3-\frac{2b^4}{a}+\frac{2b^4}{a} \&c.$$

ubi, remotis contradictoriè oppositis, habetur a^3+b^3 &c. Idem ferè contingit, ubi potestatum paris gradus summa, vel imparis gradus differentia dividitur per summam radicum, nisi quòd signa tunc sunt alternanda; ut

$$\frac{aa+bb}{a+b} = a-b+\frac{2bb}{a}-\frac{2b^3}{aa}+\frac{2b^4}{a^3} \&c. \text{ in infinitùm.}$$

$$\frac{a^3-b^3}{a+b} = aa-ab+bb-\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^4}{aa}-\frac{2b^5}{a^3} \&c.$$

$$\frac{a^4+b^4}{a+b} = a^3-aab+abb-b^4+\frac{2b^4}{a}-\frac{2b^5}{aa} \&c.$$

Sic etiam

$$\frac{aa}{a\mp b} = a\mp b+\frac{bb}{a}\mp\frac{b^3}{aa}+\frac{b^4}{a^3} \&c.$$

$$\frac{a^3}{a\mp b} = aa\mp ab+bb\mp\frac{b^3}{a}+\frac{b^4}{aa}\mp\frac{b^5}{a^3} \&c.$$

Non dissimili ratiocinio demonstrare soleo extractionem radicis Neutoniano modo per series infinitas. Putà ℞ $aa+xx$ (quæ est expressio generalis ordinatarum ad rectum hyperbolæ latus, existente a semitransverso,

& x distantia à centro) vel ℞ $aa - xx$ (quæ exprimit ordinatam quadrantis circuli, cujus radius a, distantia ordinatæ à centro x) sic enim series ordinari solet

$$a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{3x^6}{48a^5} - \frac{15x^8}{384a^7} + \frac{105x^{10}}{3840a^9} \text{ \&c.}$$

ubi signum $\pm$ valet $+$ in hyperbola, $-$ in circulo, numeri autem, qui post tertium terminum afficiunt numeratores, sunt per ordinem 3. 3×5. $3 \times 5 \times 7$. &c. qui verò afficiunt denominatores, incipiendo à secundo termino, sunt 2. 2×4. $2 \times 4 \times 6$. $2 \times 4 \times 6 \times 8$. &c. orti scilicet, illi quidem ex mutua multiplicatione omnium imparium, hi verò ex multiplicatione mutua omnium parium numerorum per ordinem dispositorum.

Demonstratur, inquam, id ita esse, quia si illa series ducatur in se ipsam, singulis ejus terminis in singulos multiplicatis, orietur nil aliud, quàm $aa \pm xx$, adeòque est legitima radix ejusdem: nam ducatur illa series

in a fiet $aa \pm \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8aa} \pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

in $\pm \frac{xx}{2a}$ fiet $\pm \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $- \frac{x^4}{8a^3}$ fiet $- \frac{x^4}{8aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $\pm \frac{3x^6}{48a^5}$ fiet $\pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

&c.

Summa erit $aa \pm xx$ 0 0 &c.

6. Ad propositum nostrum redeuntes, doctrinam,

num. 3. adductam, alteri Theorematis decimi demonstrationi sic applicabimus: esto Logistica BVI, tangens ad B ipsa BO, subtangens OF, cujus particula infinitè parva FQ accepta, circumscribantur æqualis latitudinis parallelogramma FM, QR, PS, &c. spatium Logisticæ ita stringentia, ut solidum ab ipsa circa FB rotata productum ferè coincidat cum aggregato solidorum à talibus parallelogrammis in eadem rotatione descriptorum, quorum primus cylindrus ex FM, secundus, tertius, & alii deinceps totidem cylindrici tubi ex parallelogrammis QR, PS, &c. à quibus certè deficere potest illud rotundum Logisticæ solidum minori defectu quolibet dato, & ratio, quam de illorum aggregato ad conum ex FOB comparato concludemus, eadem de ipsomet Logisticæ solido demonstrata esse intelligetur. Subtangens igitur FO vocetur a, & FQ infinitè parva d; OQ autem pro unitate 1 designetur, ipsa FB per b denominata; cùm sit igitur (ob indefinitam ipsius FQ parvitatem, & punctum N curvæ cum tangente OB coincidens) FO ad OQ, scilicet a ad 1, ut BF, seu b ad QN, hæc exprimenda erit per $\frac{b}{a}$; & reliquæ lineæ PV, TI, &c. in quibus eadem proportio (ex curvæ natura) continuatur, eò quòd paribus intervallis sint dissitæ, erunt per ordinem $\frac{b}{aa}, \frac{b}{a3}, \frac{b}{a4}$, &c. in infinitum; altitudines igitur prædictorum solidorum conflabunt hanc geometricam seriem $b, \frac{b}{a}, \frac{b}{aa}, \frac{b}{a3}, \frac{b}{a4}$, &c. bases autem eorumdem in ratione quadrati primi radii FQ, & mox differentiæ quadrati FP ab FQ, & quadrati FT ab FP, &c. nempe, ut dd, $3dd$, $5dd$, $7dd$, eò quòd differentiæ quadratorum à lateribus arithmeticè proportio-

TAB. XIV. Fig. 7.

 nali-

nalibus sint, ut impares numeri; hac igitur serie per illam multiplicata prodibit series ipsorum per ordinem solidorum ddb, $\frac{3ddb}{a}$, $\frac{5ddb}{aa}$, $\frac{7ddb}{a^3}$, &c. quam quidem resolvere potes in has numero infinitas, prefixis majusculis litteris subnotatas,

$$\begin{array}{llllll}
A & ddb + & \frac{ddb}{a} + & \frac{ddb}{aa} + & \frac{ddb}{a^3} + & \frac{ddb}{a^4}, \&c. \\
B & & \frac{2ddb}{a} + & \frac{2ddb}{aa} + & \frac{2ddb}{a^3} + & \frac{2ddb}{a^4}, \&c. \\
C & & & \frac{2ddb}{aa} + & \frac{2ddb}{a^3} + & \frac{2ddb}{a^4}, \&c. \\
D & & & & \frac{2ddb}{a^3} + & \frac{2ddb}{a^4}, \&c. \\
E & & & & & \frac{2ddb}{a^4}, \&c. \\
\hline
\end{array}$$

quarum summa $ddb + \frac{3ddb}{a} + \frac{5ddb}{aa} + \frac{7ddb}{a^3} + \frac{9ddb}{a^4}$, &c. eadem, ut constat, quæ priùs.

7. Sunt verò præscriptæ series terminorum proportionalium, quorum exponens commune a; si igitur maximi earum termini ducantur in a, & productum dividatur per $a - 1$, (quod hìc juxta constructionem est quantitas d infinitè parva) habebuntur termini iis infinitis seriebus æquales: putà series A æquatur dba; series B æquatur $2db$; series C æquatur $\frac{2db}{a}$; series D æqua-

quatur $\frac{2db}{aa}$, & sic deinceps; series igitur illorum solidorum æquabitur progreſſionibus duabus

$$dba + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a3}, \text{ \&c.}$$

$$db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a3}, \text{ \&c.}$$

quippe harum summa terminis nuper collectis æquatur;

$$dba + 2db + \frac{2db}{a} + \frac{2db}{aa} + \frac{2db}{a3}, \text{ \&c.}$$

prima autem harum serierum (facta eadem multiplicatione) æqualis est *baa*; secunda verò æqualis *ba*; (sive, ut æquè multæ utrobique appareant dimensiones, addita hinc unitate, dicas *ba* 1) est verò unitas QO, ferè $=$ OF, ideſt *a*, quippe à qua deficit differentia FQ infinitè parva, igitur pro *ba* 1 accipi poterit iterum *baa*; atque adeò series dictorum solidorum, seu ipsum rotundum solidum Logisticæ, de quo loquimur in hoc Theoremate, optimè exprimetur per 2 *baa*; Conus autem ex triangulo BOF, utpote æqualis trienti cylindri circumscripti (pro circulo accepto radii quadrato, ut in solidorum serie factum est, quod in idem recidit, ob proportionalitatem servatam) exprimendus erit per $\frac{1}{3}$ *baa*; solidum igitur Logisticæ ad inscriptum Conum erit, ut 2 *baa* ad $\frac{1}{3}$ *baa*, sive ut 2 ad $\frac{1}{3}$, vel ut 6 ad 1. Q. e. d.

8. Nisi hic demonstrandi modus plenè satisfecerit, prima ostensione contentus, secundæ saltem conatum lauda, ac mecum progredere ad dimetiendas ejusdem solidi portiones, à partibus videlicet per binas ordinatas resectis, & circa majorem ipsarum revolutis progenitas; idque diversâ rursus à præcedentibus methodo: esto,

TAB. XIV. Fig. 8. Logiſtica BNM, cujus ad puncta N, M, tangentes NC, MG occurrant aſymptoto quidem FG in punctis C, G, ordinatæ verò BF in punctis K, I, & coordinentur ND, NA, ME, MH; dico AK ad HI (ſubtangentes ſcilicet in ordinata, non in aſymptoto acceptas) eſſe ad invicem, ut ſunt rectangula AND, HME; ratio enim AK ad HI componitur ex AK ad AN (ſeu DN ad ſubtangentem DC, vel EG), AN ad MH, & MH ad HI (ideſt ſubtangentis EG ad EM), ergo & componitur ex DN ad EM, & AN ad MH; ex his autem conflatur ratio rectanguli AND ad HME; itaque conſtat propoſitum. Breviùs ſic: ob proportionales lineas GE, EM, MH, HI, eſt rectangulum ex GE, aſymptoti ſubtangente, in HI, ſubtangentem ordinatæ, æquale inſcripto rectangulo EMH; ſimiliter CD in AK æquabitur DNA; ergo, ut rectangula ſubtangentium aſymptoti in ſubtangentes ordinatæ, (hoc eſt ipſæ ſubtangentes in ordinata, cùm quæ in aſymptoto ſint æquales) ita erunt rectangula Logiſticæ inſcripta.

TAB. XIII. Fig. 2. 9. Concipiamus jam Logiſticam eſſe A*a*C, cujus ordinata AN, aſymptotos N*b*, tangens ad quodvis punctum *a* ipſa *a*B, conveniens cum ordinata in B; ac motâ regulâ N*o* per punctum N, ita ut perpetuò parallela exiſtat tangenti, occurrat verò ordinatæ productæ *an* ad puncta *o*O, perficiatur figura N*o*O ad communem axem N*b* poſita, quæ, ex dictis *cap.* 8. *num.* 4. & 5., erit ipſi Logiſticæ correlata, ejuſque ſpatia *o*N*n* reſpectivè ſemper æqualia ſpatiis *a*A*r*: ſingulæ autem lineæ *on* æquales erunt ſubtangentibus *r*B, in ordinata acceptis; ſed hæ proportionantur rectangulis *nar*, inſcriptis Logiſticæ ſpatio, vel etiam ſuperficiebus cylindricis per illorum converſionem circa NA deſcriptis; erunt igitur lineæ ordinatæ in figura ON*n*, ipſi *on* parallelæ ut concentricæ ſuperficies cylindricæ in ſolido rotundo ex *na* AN, circa AN revoluto, productæ à ſingulis ordinatis *na* per

na per eadem puncta *n* transeuntibus; igitur omnes lineæ figuræ *on*N ad totidem æquales extremæ *on* (sive ipsa figura *on*N, aut trilineum *a*A*r* illi æquale ad rectangulum N*no*, vel *ar*B) erunt, ut omnes cylindricæ superficies in dicto solido, ex portione *na*N revoluta genito, ad totidem æquales extremæ à linea *na* generatæ, (idest ut ipsummet solidum rotundum ad solidum, quod gigneretur ab hyperbola per *a* asymptotis *n*NA inscripta, & circa NA revoluta, quippe in illo omnes cylindricæ superficies concentricæ æquales forent ei, quæ ab *na* describitur, propter singula inscripta parallelogramma ipsi *nar* æqualia) & sumendo consequentium semisses, erit trilineum *ar*A ad inscriptum triangulum *ar*B, ut solidum rotundum ex *na*AN circa AN, ad inscriptum cylindrum ex parallelogrammo *nar*N revoluto productum.

10. Nota autem est ratio trilinei ad inscriptum triangulum, quippe, assumptâ figurâ *cap.* 7. *num.* 2. adhibitâ, constat, trilineum BKA æquari rectangulo subtangentis OF in QA, triangulum verò BKQ æquatur rectangulo ex BK in semissem KQ; propterea ratio trilinei ad triangulum componetur ex OF ad BK, (vel DK ad KQ) & ex QA ad semissem KQ (vel dupla QA ad KQ); idest erit, ut duplum rectangulum ex DK in QA ad quadratum KQ; nota igitur similiter erit ratio solidi rotundi ex spatio Logisticæ duabus ordinatis intercepto, & circa majorem revoluto, ad cylindrum inscriptum, ab inscripto scilicet parallelogrammo in eadem conversione progenitum, eadem semper, quæ præfati rectanguli ad dictum quadratum. Tubos verò, seu annulos ex ejusmodi spatiis circa ordinatam à majori remotiorem revolutis, putà ex GHBF circa AD rotato, progenitos, eâdem assumptâ superioris numeri figurâ, eodemque argumento facilè ad mensuram vocabis, similia vestigia premendo.

TAB. XII. Fig. 1.

CAPUT XI.

Propositio, & demonstratio Undecimi Theorematis circa distantiam centri gravitatis Logisticæ ab ordinata. Solida infinitorum Logisticæ spatiorum circa ordinatas sunt, ut eædem ordinatæ. Centrum gravitatis quomodo distet ab alterutra ordinatarum in spatiis determinatis Logisticæ. Solida ex his spatiis circa quamvis ordinatam revolutis. Datum solidum in data ratione dividere, &c. Propositio, ac prima demonstratio Theorematis XII. circa distantiam centri gravitatis Logisticæ ab axe. In Correlatis figuris distantia centri gravitatis interioris subdupla est similis distantiæ exterioris. Talis distantia in figura Correlata quadrantis circuli est sesquitertia basis quadraticis. Centrum gravitatis trilinei Cycloidis distat à verticis tangente per semissem radii. Distantia centri gravitatis semicycloidis, & ejus trilinei à basi, & vertice; necnon solida ab iis descripta. Cissoidalis spatii centrum gravitatis, in qua ab asymptoto distantia; ejus solida, atque hinc ratio fusi cycloidalis ad cylindrum. Figuræ, quæ Logisticæ ad axem correlata est, distantia centri gravitatis ab ordinata. Similis distantia in harum, & generaliter omnium Correlatarum figurarum complexo. Secunda demonstratio Duodecimi Theorematis, & extensio ad inventionem centri, in quibusvis Logisticæ portionibus, ad solida, ex iis circa quamvis lineam rotandis determinanda, utilem.

1. JAm ad centra gravitatis, tum spatii superficialis Logisticæ tum solidorum ipsius, determinanda procedit Hugenius; ait enim Theoremate Undecimo: *Ex hac solidorum mensura sequitur, quòd centrum gravitatis infiniti*

finiti spatii post unam ordinatarum distat ab hac ordinata longitudine subtangentis; quod sic breviter demonstratur. Rotunda solida rationem habent compositam ex rationibus figurarum genitricum, & distantiarum centri gravitatis earumdem ab axe motus, ex pervulgata jam regula Guldini, cui nescio an præluserit Pappus ad finem suæ præfationis in *lib. 7. mathem. collect.* Solidum igitur ex Logistica BCA circa BF ad conum, ex inscripto triangulo OBF circa eamdem revoluto, est in composita ratione ex spatio Logisticæ FBCA ad triangulum OBF, (quæ per Theorema 7. *cap.* 8. demonstratum est ratio dupla) & ex distantia centri gravitatis spatii Logistici ab ipsa FB ad distantiam centri gravitatis trianguli, quæ, ut notum est, æquaretur trienti ipsius OF; sed hæc eadem solida, ex dictis *cap. præced.*, sunt ad invicem in ratione sextupla, ideft in composita ex dupla, & tripla; oportet ergo distantiam centri gravitatis spatii Logistici ab ipsa FB esse triplam distantiæ centri gravitatis trianguli ab eadem FB; ergo oportet talem distantiam esse ipsammet subtangentem OF, cujus triens distantiam centri gravitatis trianguli, ut diximus, determinat; patet ergo propositum. TAB. XII. Fig. 6.

2. Hinc habetur, cujusvis infiniti spatii Logisticæ BAVQ, vel CVFQ, distantiam centri gravitatis ab extrema ordinata eamdem semper esse, quippe æqualem communi subtangenti: unde efficitur, solida ex primo spatio circa BA, & ex secundo circa CV, esse ad invicem, ut ipsamet spatia, ex quibus gignuntur, ob æqualem utrinque centri gravitatis distantiam, seu esse ad invicem, ut ipsæ ordinatæ BA, CV talibus spatiis proportionales, ex dictis *cap.* 3. *num.* 7., id quod vel exinde patet, quòd talium solidorum subsexcupla, nempe coni ab inscriptis triangulis AOB, CVQ, ob cir- TAB. XII. Fig. 7.

circulos æqualium radiorum BO, CQ, sunt, ut altitudines BA, CV, circa quas convertuntur.

3. Hinc etiam patet, determinato quovis spatio BAVC duabus ordinatis interjecto, assignari posse distantiam ejus centri gravitatis ab alterutra ordinatarum. Ducatur enim tangens AO, itaque in O est centrum æquilibrii totius spatii BAVQ compositi ex proposito BAVC, & ex reliquo CVFQ; sed reliqui CVFQ habetur centrum gravitatis, ducta tangente QV, in ordinata ex puncto Q, distans videlicet ab æquilibrii centro O per QO æqualem altitudini CB propositi spatii (ut patet, æqualibus subtangentibus CQ, BO, communem subtrahendo, vel addendo quantitatem CO). Si igitur fiat, ut spatium BAVC ad reliquum CVFQ, nempe ex Theoremate tertio, quod *cap.* 4. *num.* 5. & *cap.* 3. *num.* 8. demonstravimus, ut differentia ordinatarum AB, CV ad ipsam CV, ita QO, vel BC, ad OE, erit in ED centrum gravitatis propositi spatii CVAB, distans ab AB per EB, & à CV per EC; constat ergo propositum.

4. Dabuntur itaque solida ex quavis Logisticæ portione AVCB, nedum conversa circa majorem ordinatarum BA, sed & circa minorem CV, quippe ad invicem in ratione EB ad EC; & annuli ex variis spatiis EDVC, & CVFG, circa eamdem, vel diversas ordinatas revolutis, notam dimensionem, & proportionem habebunt, quippe in composita eorumdem spatiorum, distantiarumque ab axe sui motus ratione; Quibus facile erit, dato solido ex dato spatio circa axem datum revoluto, aliud ex alio item spatio dato circa aliam quamdam ordinatam majorem, minoremve revolvendo producendum reperire, priori solido, vel æquale, vel in data ad ipsum ratione; item, quodvis ex talibus solidis per concentricas superficies in data ratione, dividere, &c.

5. Jam

5. Jam ad Duodecimum Theorema Hugenii gradum faciamus, in quo afferit: *Idem centrum gravitatis distare ab asymptoto per quadrantem ordinatæ*; Similiter enim ratio solidi ex BCA Logistica circa axem FO, ad conum ex triangulo OBF circa eumdem axem, cùm sit, ex Theoremate, & *cap.* 9., ratio sesquialtera, componetur utique ex dupla, & subsesquitertia, ut patet in numeris 6, 3, 4; componitur autem & ex ratione spatii FBCA ad triangulum FBO (quæ est ratio dupla) unà cum ratione distantiæ centri gravitatis spatii FBCA ad distantiam similis centri trianguli FBO ab eodem axe motus FO; oportet igitur, quòd distantia centri gravitatis spatii Logisticæ ab axe sit subsesquitertia distantiæ centri gravitatis trianguli, nempe subsesquitertia trientis ipsius FB, adeòque quòd sit æqualis quadranti ipsius FB, ut in hoc Theoremate proponitur, sic enim erit ad distantiam centri gravitatis trianguli, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{3}$, idest prorsus, ut 3 ad 4. Q. e. d. TAB. XII. Fig. 6.

6. Eadem veritas, ut secundò demonstretur, immò & ad distantiam centri gravitatis partium Logisticæ extendatur, uberrimum illum fontem Correlatarum figurarum, unde bis jam hausimus, in *cap.* scilicet 8. & 9., tertiò iterum repetam, neque enim venam idcirco exhauriendam putes, Mi Lector. Audi igitur. In Correlatis quibuscumque figuris CAN, & *g*GA*a*C, aut CAN, G*oo*N, distantia gravitatis centri primæ figuræ interioris CAN ab axe NB, semper subdupla est distantiæ similis centri alterius figuræ *g*GA*a*C, vel AG*oo*N ab eodem axe; cùm enim æquales sint hæ figuræ, utì *cap.* 8. demonstratum est, solidum tamen, quod ex prima sit, ex *cap.* 9., subduplum solidi ex secunda circa axem NB revoluta, patet, hæc solida esse ad invicem, ut sunt distantiæ centrorum gravitatis ab axe motus, adeòque distantiam primæ esse subduplam distantiæ alterius; & datâ distantiâ centri gravitatis alteru- TAB. XV. Fig. 6. 7. TAB. XII. Fig. 4. 5.

terutrius ex Correlatis figuris, distantia reliquæ non ignorabitur.

TAB. XII. Fig. 2. 7. Colliges jam, distantiam centri gravitatis figuræ ANoo, quadranti circulari Correlatæ, ab axe CN, esse sesquitertiam basis Quadratricis, eidem quadranti per C adscriptæ; cùm enim debeat dupla esse distantiæ centri gravitatis quadrantis CAN, quæ æquatur $\frac{2}{3}$ baseos dictæ Quadratricis, eò quòd ratio composita ex distantia centri gravitatis quadrantis ad semissem radii, (distantiam centri gravitatis quadrati circumscripti) & ex semisse radii ad basim Quadraticis, sive ex semisse arcus CA ad radium, aut ipsius quadrantis CAN ad radii quadratum, debet esse ratio sesquialtera, eadem nempe, quæ hæmispherii ex quadrante ad cylindrum ex radii quadrato (juxta Archimedis doctrinas breviùs à nobis demonstratas in Vivianeis ad *Prop. 37. Coroll. 6.*) quæ, ex Centro-barica, præscriptis rationibus componitur. Nota proinde fiet distantia centri gravitatis ejusdem figuræ ANoo ab AS, & notum solidum ex ipsa circa AS descriptum, uti & ex eadem circa CN.

TAB. XIV. Fig. 16. 8. In trilineo Cycloidis AaON patebit, centrum gravitatis distare à tangente verticis AN per semissem radii, figura quippe huic Correlata est, ex *cap.* 8. *num.* 7., semicirculus Noo, cujus centri gravitatis distantia est utique radius integer: consequenter distabit idem gravitatis centrum in trilineo Cyclodis ab ejus basi OD per $\frac{1}{4}$ diametri ON; & solidum ex tali trilineo circa OD, triplum erit solidi ex ejusdem conversione circa NA, vel æquale erit solido ex aggregato semicirculi, & præfati trilinei, videlicet spatii ANoOaA (aut ANO+AdD) circa NA; cùmque cylindrus ex parallelogrammo ONAD, sive circa OD, sive circa NA, pariter idem sit; residuum, nempe factum ex DAaO semicycloide circa OD, æquabitur facto ex trilineo OaAddD circa NA, atque, ut ipsa semicyclois

cloïs ad dictum trilineum, ita reciprocè erit distantia centri gravitatis ejusdem trilinei ab NA, ad distantiam centri gravitatis semicycloidis à basi OD, videlicet in ratione sesquialtera, illa autem æquatur $\frac{1}{8}$ diametri AD (ut mox ostendam); ergo hæc æquatur $\frac{1}{12}$ ejusdem suæ diametri.

9. Quod nuper assumpsi sic ostendetur: notum est, duas simul lineas in trilineo Cycloidali O*a*A*d*D à centro æquè remotas, *ad*, *ad*, æquales esse basi OD, seu interceptæ *od* inter peripherias semicirculorum A*d*D, N*o*O; ipsa igitur *oa*, accepta in trilineo A*a*O*o*N versùs basim, æqualis semper erit lineæ *ad*, sumptæ versùs verticem A in altero trilineo A*a*OD*d*A; itaque ipsum trilineum A*a*O*o*N haberi poterit pro eodem O*a*A*d*D inversè posito, & tanta erit centri gravitatis distantia in hoc ab ipsa AN, quanta in illo similis centri distantia ab OD. Jam sic: solidum ex solo A*a*O*n*N circa OD triplum est, ex supra ostensis, solidi ex eodem spatio circa NA; & annulus ex semicirculo NO*o* circa OD (nam perinde est, ac circa AN) est ejusdem duplus; itaque solidum ex utriusque complexo A*a*O*o*N circa OD quintuplus est solius solidi ex O*a*AN*n* circa NA, additoque & hinc annulo ex semicirculo eodem circa NA, cujus quantitas ejusdem solidi est dupla, habebitur, quòd solidum ex integro spatio A*a*O*o*N circa OD, ad solidum ex eodem circa NA est, ut 5 ad 3; distantia igitur centri gravitatis talis spatii ab OD, ad distantiam ejusdem ab AN est, ut 5 ad 3; ideòque prima distantia æquatur 5 octantibus diametri NO, vel AD, indeque, ex præmissis, distantia centri gravitatis trilinei O*a*A*d*D ab AN eadem erit, quam supra determinavimus.

10. Cùm igitur & spatium Cissoidale, juxta dicta *cap.* 8. *num.* 9., figura sit Cycloidi Correlata, erit distantia centri gravitatis spatii Cissoidalis AN*oo* infinitè longi, à TAB. XII. Fig. 3.

CN, dupla distantiæ similis centri cycloidis AaCN ab eadem basi CN; cùmque hæc æqualis sit $\frac{1}{12}$ diametri, juxta dicta *num.* 8., illa æqualis erit $\frac{2}{12}$ seu $\frac{1}{6}$ ejusdem diametri, ac consequenter distabit idem gravitatis centrum ab asymptoto AO per sextantem diametri NA; eritque solidum ex Cissoide ANoo circa AO revoluta, æquale quintæ parti solidi ex eodem spatio circa CN converso, aut $\frac{1}{5}$ solidi ex Cycloide ACN circa basim CN (quippe hoc solidi ex Cissoide circa eumdem axem subduplum est, utì jam ostendimus *cap* 9. *num.* 12.) est verò, ut ibidem monuimus, solidum ex Cissoide circa AO, æquale annulo stricto ex semicirculo genitore; solidum igitur ex semicirculo genitore Cycloidis circa tangentem verticis, vel basim cycloidis revoluto, æquatur $\frac{2}{5}$ fusi Cycloidalis ex cycloide circa basim rotata, qui propterea fusus æquabitur 5. octantibus circumscripti cylindri ex parallelogrammo DONA (T. XIV. *Fig* 10) semicirculi quadruplo, indeque producente cylindrum quadruplum dicti annuli.

11. De infinitarum parabolarum, atque hyperbolarum, deque Tractoriæ centro non est quod addam, Tute ipse exerce, mi Lector; ego obiter adnoto, in figura NoO ad eumdem axem Nb Logisticæ Correlatâ, ejus gravitatis centrum ab NA distare per duplum subtangentis Logisticæ, quandoquidem centrum Logistici spatii ex superiori Undecimo Theoremate, distat ab ordinata AN per simplicem longitudinem subtangentis; complexi verò ex figuris Correlatis, scilicet spatii CaANoO centrum gravitatis distat ab AN per sesquialteram longitudinem subtangentis; immò generaliter semper in figuris Correlatis, quarum partium distantia interioris, (scilicet ad quam pertinet tangens aB) est 2, earum distantia complexi ex utroque spatio est 3, distantia verò exterioris (scilicet ad quam ordinantur ipsæ on æquales subtangentibus alterius.) est 4; utì est evi-

TAB. XIII. Fig. 2.

evidens ex dimensione solidorum ab iis factorum: unde expeditiùs demonstrabis quæ *num.* 9. dicta sunt.

Data autem opera, tum hìc, tum *cap. præced.* omisimus demonstrationem centri gravitatis in figuris ad modum Spiralium descriptis, ut in iis exercere se posset Lectorum industria, comparando videlicet triangula illa, ex quibus constant, cum parallelogrammis figurarum Correlatarum, ut supra fecimus *cap.* 8. *num.* 11.

12. In Logistica igitur *AaaC*, cujus Correlata figura ad ordinatam NA est parallelogrammum AGON, ut ostendimus *d. cap.* 8. *num.* 13, cùm distantia centri gravitatis ipsius OGAN dupla esse debeat distantiæ similis centri Logisticæ NA*a*C ab eodem axe NB; sit autem distantia illa in parallelogrammo æqualis semissi ipsius NA, patet, distantiam ejusmodi in spatio Logistico fore ¼ ejusdem NA, utì in hoc duodecimo Theoremate ab Hugenio propositum fuit; sed & constat methodus comparandi distantias centri gravitatis variarum insuper Logisticæ partium ab eodem axe; accepto quippe spatio quolibet *naan*, ordinatisque *aro*, *aro*, patet, rectangulum *orro* esse figuram Correlatam ipsi *anna*; datur autem distantia centri gravitatis parallelogrammi ejusdem ab NO, scilicet media arithmetica inter *r*N, *r*N distantias laterum ab NO, itaque & ejus subdupla dabitur, scilicet distantia centri gravitatis figuræ *naan* ab eodem axe, perpetuò æqualis semissi mediæ arithmeticæ inter extremas ordinatas. Id quod suo modo observatur & in toto Logisticæ spatio, extremæ siquidem ordinatarum sunt AN, & punctum, media inter hæc arithmetica semissis NA; hujus dimidio, nempe ¼ NA æqualis prorsus est distantia centri gravitatis integri spatii Logisticæ. Dabitur ergo in quovis hujusmodi spatio, sive integro, sive duabus ordinatis intercepto, punctum ipsum, quod gravitatis ejus centrum determinat, adeòque jam metiri licebit solida à

TAB. XII. Fig. 4.

Logisticæ spatiis circa quamlibet lineam revolutis, ex dimensione tum ipsius Logisticæ, tum distantiæ ejus centri gravitatis à proposita linea.

CAPUT XII.

Theorema Decimumtertium demonstratur. Eadem semper centri gravitatis in quibusvis infinitè longis Logisticæ solidis distantia; quomodo in ejusdem solidi portionibus indaganda. Prima demonstratio Decimiquarti Theorematis; ad majorem rigorem quomodo exigenda. Solidorum ab eadem figura circa basim, & axim rotata distantiæ centri gravitatis sunt, ut distantiæ ab axi, & basi genitricis figuræ. Altera ejusdem Theorematis demonstratio. Variarum Conoideon centra hinc determinanda; in portionibus solidi rotundi, aut cylindricis Logisticæ truncis, aut figura Logisticæ Correlata, centra gravitatis dantur. Libræ infinitæ, geometricè decrescentibus, & æquè distantibus ponderibus gravatæ, aut finitæ quidem, sed per intervalla continuè proportionalia arithmeticè in infinitum crescentibus quantitatibus oneratæ, centra æquilibrii determinari possunt. Secunda demonstratio à scrupulo vindicata. Cautio in his adhibenda; aliorum lapsus notati, ut devitentur. Curvis superficiebus solidorum generalis demonstratio applicatur. Logistica curva centro gravitatis caret; circa axem rotata superficiem infinitè longam, finitæ dimensionis producit: in qua ad determinatam hyperbolam ratione; hæc hyperbola, cujus parabolicæ lineæ in semitransversum ductæ rectangulo æqualis; curva illa superficies, cujus circumferentiæ, & peripheriæ parabolicæ rectangulo æqualis; ut ejus portiones correspondeant ejusdem parabolæ partibus. Tractoriæ solidum finita superficie gaudet, ejus curva centro pariter caret.

1. Post

1. POst centra gravitatis spatiorum Logisticæ, progreditur Hugenius ad gravitatis centra in ejus solidis determinanda: *Reperimus*, inquit Theorem. XIII., *quòd centrum gravitatis primi ex dictis solidis infinitis distat à sua basi per semissem subtangentis.* Primum quippe illud solidum ex Logistica F B C A circa axem F O revoluta, resolutum in circulos basi parallelos, proportionaliter anologum est alteri Logisticæ B N M, ordinatarum in duplicata priorum ratione decrescentium, qualem supra descripsimus *cap.* 9. *num.* 4.; eadem igitur erit distantia centri gravitatis præfati solidi à circulo suæ basis, quæ distantia centri gravitatis Logisticæ B N M à sua extrema ordinata F B; sed hæc distantia æquatur subtangenti ejusdem Logisticæ B N M, per undecimum Theorema Hugenii superiori capite demonstratum, & hæc eadem subtangens ostensa est, *cap.* 9. *num.* 5., æqualis semissi subtangentis F O, pertinentis ad priorem Logisticam B C A; itaque & illius solidi rotundi centrum gravitatis distabit ab extremo circulo suæ basis per semissem subtangentis, seu Parametri. Quod erat demonstrandum. TAB. XII. Fig. 6.

2. Eadem itaque semper erit distantia centri gravitatis à sua basi infinitorum quorumvis solidorum ab eadem Logistica per varias ordinatas resectâ factorum, semper scilicet æqualis dimidiæ subtangenti ejusdem Logisticæ; Quocirca portionum etiam cujusvis ex dictis solidis centra gravitatis assignari poterunt: proponatur enim, v. g. quod fit ex portione B A V G circa B G revoluta; ita procedemus, simili methodo, ac superiori capite *num.* 3.; esto B O semissis subtangentis, & consequenter O centrum gravitatis totius facti ab infinito spatio B A V Q. Similiter & C Q semissis subtangentis ejusdem, ut punctum Q sit centrum gravitatis solidi, quod ex C V F Q; distat igitur hoc centrum à puncto O, per Q O æqualem altitudini solidi propositi B C, propter communem TAB. XII. Fig. 7.

addi-

additam, vel detractam CO; fiat igitur, ut solidum ex ABCV ad infinitum ex CVFQ, nempe, ut colligitur ex dictis *cap.* 9. *num.* 3. & 10., ut differentia quadratorum AB, & CV, ad quadratum CV, ita QO, vel BC ad aliam OE, erit E centrum gravitatis solidi ex spatio BAVC circa BC revoluto geniti; quamquam expeditiùs fortè idem obtinere licebit per inventionem distantiæ centri gravitatis ab ordinatis in congruo spatio Logisticæ, in duplicata ordinatarum ratione decrescentis, proportionaliter analogo ad dictum rotundum solidum, utì numero præcedenti indicavimus.

3. Difficilior mihi visa fuit, reque ipsa nonnisi ægrè successit (cur enim fateri erubescam, qui & in magis obviis moram pati aliquando soleo?) Theorematis decimiquarti demonstratio, ubi Vir Clarissimus pronunciat, quòd *centrum etiam gravitatis alterius solidi distat ab ejus infinita basi per octantem sui axis.* Hoc ut demonstrem, figuram resumo, eumdemque calculandi
TAB. XIV. Fig. 7. modum, quo, *cap.* 10. *num.* 6., usus sum: ex parallelogrammis itaque FM, QR, PS Logisticæ circumscriptis, intelligatur confici, in conversione omnium circa FB, series solidorum, quæ pro minori, ac minori latitudine singulorum, magis magisque accedet ad rotundum Logisticæ solidum, de quo in hoc Theoremate sermo est; itaque ubi FQ infinitè parva supponatur, tunc cylindrus ab FM descriptus, & tubi cylindrici ex reliquis QR, PS, &c. prorsus coincident cum tali Logisticæ solido, quodque de iis demonstrabimus, de hoc perinde obtinebit; porrò ostendimus, loco citato, (retentis iisdem symbolis) cylindrum FM esse *ddb*, & tubos huic consequentes per ordinem esse $3\frac{ddb}{a}$, $5\frac{ddb}{aa}$, &c. ut supra *pag.* 250., seu (propter infinitè exiguum excessum ipsius *a*, seu FO super assumptam unitatem

tatem QO, qui excessus penitus evanescit, ubi solidorum series in ipsum Logisticæ solidum deficit) acceptâ loco ipsius a, unitate, quæ ad quemlibet gradum elevata non crescit, nec terminos dividens illos immutat, erit prædicta solidorum series æqualis $ddb + 3ddb + 5ddb + 7ddb$; &c.; Suspenditur autem in libra FB primus terminus ad punctum C, medium ipsius FB, & secundus terminus ad punctum x, ubi cadit axi parallela, ducta ex medio puncto A lineæ QN; & tertius terminus ad y punctum, quod determinat parallela yD bifariam secans ipsam PV; similiter & quartus terminus pendet ex z per lineam zE bisecantem ipsum TI; sunt enim puncta C, x, y, z, &c. centra gravitatis per ordinem talium solidorum; per puncta verò C, A, D, E, & alia similiter bifariam secantia singulas Logisticæ ordinatas, transit utique linea pariter Logistica EDACg. Producta igitur OF in f, ut Ff æquetur semissi ipsius FQ, (adeòque à fortiori sit infinitè parva quantitas, ac penitus evanescens) ad parallelam ordinatam fg producantur axi æquidistantes Ez, Dy, Ax, in e, d, a, c; poterit similiter fg sumi pro libra, ex qua pendeat primum solidum per lineam Cc, secundum per lineam Aa, tertium per Dd, quartum per Ee, &c. & quidem quarum partium Ff, seu Cc ponitur 1. talium Aa est 3. Dd 5. Ee 7. &c., juxta progressionem arithmeticam numerorum imparium, secundùm quam ipsa solida ex iis pendentia procedunt; perinde igitur onerabitur linea fg, vel FC à talibus solidis ex ea pendentibus, ac oneretur fg à lineis Logisticæ gCADE; sed ab his ordinata fg sic oneratur, ut centrum æquilibrii habeat distans ab axe FO per quadrantem ipsius fg, vel FC illi proximè æqualis; (talis quippe ex Theoremate duodecimo est distantia centri gravitatis Logistici spatii, quod tales lineæ implent) ergo & centrum æquilibrii,

aut gravitatis omnium illorum solidorum, seu integri solidi ex Logistica circa ordinatam revoluta, distat similiter ab axe per quadrantem ipsius FC, seu octantem integræ FB ordinatæ; quod est propositum.

4. Si quis autem majorem in præsenti demonstratione rigorem desideraverit, is poterit apagogico circuitu sibi penitus satisfacere, sumptis, loco linearum C*c*, A*a*, D*d*, E*e*, parallelogrammulis C*cg*, A*ac*, D*da*, E*ed*, &c. quæ penitus proportionalia deprehendet dictis solidis, siquidem eorum altitudines BF, QN, PV, &c. proportionantur earumdem semissibus, & talium semissium differentiis *g*C, C*a*, *ad*, *de*, &c. bases verò talium solidorum sunt, ut differentiæ quadratorum ex lineis FQ, FP, FT, &c. arithmeticè crescentium, scilicet ut impares numeri, vel ut lineæ C*c*, A*a*, D*d*, E*e*, &c. Unde cùm accepta fuerint tot solida, quæ integrum Logisticæ solidum impleant, & totidem parallelogramma, quæ Logisticum illud spatium adæquent, constabit, in eodem puncto, tum Logistici illius spatii centrum æquilibrii, tum solidi illius centrum gravitatis reperiri, adeòque ad quartam ipsius FC, vel octavam totius FB partem ab axe acceptam. Quod, &c.

5. Sed absit, ut hìc ego subsistam; tamdiu mihimet ungues corrodam, quò usque clariorem, (& verò generalissimam) rei hujus demonstrationem detur extundere; mihi certè videtur universalius quidpiam hinc relucere, quàm ut peculiaribus Logisticæ proprietatibus adstringi mereatur. Jam jam assequor: an non hoc illud est, quod in qualibet figura FBV, cujus basis FB, axis FQ, quam rationem habet distantia centri gravitatis figuræ planæ ab axe, ad similem distantiam à basi, eamdem & proportionem habent ad invicem distantiæ centri gravitatis (uniuscujusque à sua basi) soli-

TAB. XIII. Fig. 5.

solidorum ex eadem circa basim, & circa axim revoluta progenitorum? Intelligatur enim tota figura circa punctum F in suo plano verticali converti, quousque axis FQ horizontaliter situetur in F*q*, in directum positus priori basi FB, quæ jam perpendiculariter pendeat in in F*b*; sumptaque axis portione FQ æquali ipsi F*q*, ordinentur QN, *qn*, quæ erunt æquales; imò eædem; & in solido quidem, ex figura FB revoluta, cogitetur per punctum Q transire cylindrica superficies à linea QN descripta in sui rotatione circa FB, cujus quidem rectangulum per axem duplum erit, ut constat, inscripti rectanguli FQNP; in solido autem, ex eadem figura circa axem F*q* revolutâ, concipiamus per punctum *q* transire circulum radio *qn* descriptum, & bisecta in A ipsa QN, ducatur AX ipsi FQ parallela; pendebit igitur, in priori solido, cylindrica superficies à linea QN descripta ex puncto X, quod est ejus centrum gravitatis; circulus verò radii *qn* pendebit ex suo centro *q*; est autem distantia *q*F ad FX, ut ipsa cylindrica superficies ex QN ad circulum ex *qn* (est enim cylindrica superficies quælibet ad datum circulum, ut rectangulum per axem illius, ad quadratum ex radio hujus, per propositionem quintam Torricellii de solid. spher. l. 1. idest in proposito, ut duplum rectangulum PNQ ad quadratum *nq*, sive ut dupla PN, vel FQ ad ipsam QN, vel ut simplex *q*F ad FX ipsius QN dimidiam); æquiponderant igitur ex F, tum ille circulus, tum hæc superficies; & hoc semper; quare & utriusque solidi ad libram continuatam BF*q* appensi æquilibrium habebitur ex puncto F; unde distantia centri gravitatis solidi ex F*bnv* circa F*q* à sua basi transeunte per punctum F, erit ad distantiam centri gravitatis solidi ex figura eadem FBNV circa FB revolutâ à sua basi per F transeunte, ut reciprocè hoc secundum solidum est ad illud primum; sed

 quia

quia utrumque gignitur ab eadem figura, nunc circa basim FB, nunc circa axem Fq, vel FQ revoluta, hæc solida sunt ad invicem, ut distantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à lineis, circa quas fit rotatio, nempe ut distantia, quam habet centrum gravitatis planæ figuræ FBV à basi FB, ad distantiam ejusdem ab axe QF; distantiæ igitur centri gravitatis solidorum ab eadem figura descriptorum, nunc factâ circa axem, nunc circa basim rotatione, sunt ad invicem, ut distantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à base ad ejusdem distantiam ab axe. Quod est propositum.

6. Cùm igitur distantia centri gravitatis spatii Logistici à sua basi, ad distantiam ejusdem ab axe sit, per Theoremata undecimum, & duodecimum supra demonstrata in capite præcedenti, ut subtangens Logisticæ ad quadrantem ordinatæ, seu basis, vel sumendo terminorum semisses, ut dimidium subtangentis ad basis octantem, etiam distantiæ centrorum gravitatis à sua basi in solidis à Logistica circa axem, & circa ordinatam revolutis, in eadem proportione erunt; quare cùm, ex decimo-tertio Theoremate, centrum gravitatis distet à basi solidi ex Logistica circa axem per dimidium subtangentis, etiam centrum gravitatis solidi ex Logistica circa ordinatam, distabit à sua basi per octantem ordinatæ, ut in hoc Theoremate XIV. proponitur. Q. e. d.

7. Interea hinc habes, datâ ratione distantiarum centri gravitatis cujusvis figuræ, tum ab axe, tum à basi (sive ab aliis duabus quibuscumque lineis) dari & rationem distantiarum centri gravitatis à basi in solidis circa easdem lineas revolutis, atque unâ istarum determinatâ, alteram non posse ignorari; quocirca omnium fusorum parabolicorum ex parabolis circa bases revolutis dabuntur centra gravitatis, quippe dantur & centra omnium Conoidum ab iisdem circa axes rotatis producto-

rum,

rum, nec ignoratur proportio, ſecundùm quam gravitatis centrum diſtat ab axe, & baſi infinitarum quarumvis parabolarum; Tu per teipſum, Mi Lector, doctrinam hanc his aliiſque figuris applicare ne graveris, mihi ad finem properanti immorari diutius non vacat, innuiſſe ſuffecerit.

8. Neque difficilius erit partium utriuſque, ex dictis ſolidis, centra eadem arte rimari, quum præmiſſum ratiocinium non minùs in portionibus figurarum, quàm in ipſis integris figuris locum habere poſſit, adeòque & ad partes ſolidorum ab iis deſcriptorum transferri queat; quæque de his rotundis ſolidis determinantur, in truncis pariter cylindricis, ſeu factis ex ductu ſpatii Logiſticæ FBNM in triangula FDG, FEH (quippe quæ illis rotundis proportionaliter analoga exiſtunt) perinde obtinere manifeſtum eſt; ſed & hinc ſponte profluit diſtantia centri gravitatis ab axe N*b* in figura N*o*O Logiſticæ ad axem Correlata, quippe analoga pariter eſt ſolido ex Logiſtica circa ordinatam, cùm oſtenſum ſit, *cap.* 10. *num.* 9., lineas O*n* correſpondere rectangulis N*na* Logiſticæ inſcriptis, ſive cylindricis ſuperficiebus per idem punctum *n* in præfato ſolido tranſeuntibus.

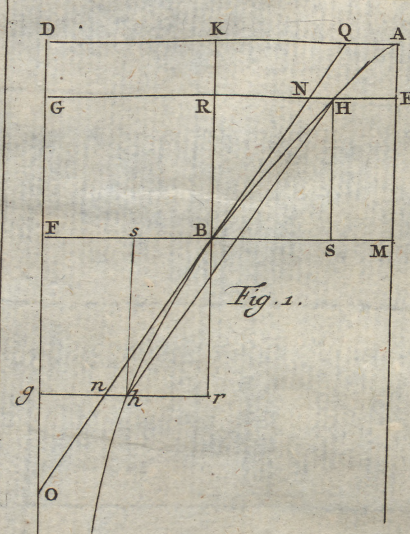
TAB. XII. Fig. 9. — TAB. XIII. Fig. 2.

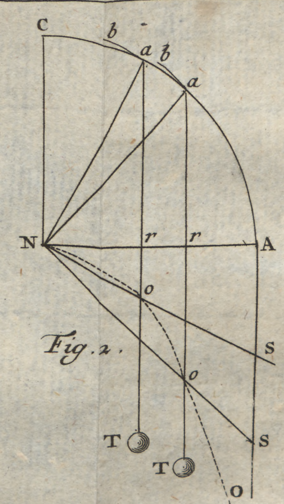
9. Animadvertendum etiam, ex his quatuor poſtremis Theorematibus faciliimè deduci, quodnam ſit æquilibrii centrum in libra longitudine infinita, in qua paribus intervallis diſſitæ magnitudines appenderentur in eadem ratione geometrica decreſcentes, velut in hac figura ſe habent A, B, C, D, E, F, &c. in infinitùm, & quomodo, ſi illæ magnitudines jam decreſcerent in duplicata priorum ratione, centrum æquilibrii duplo propiùs accederet termino libræ, unde omnium maxima penderet; Hæc enim ex undecimo, & decimotertio Theorematibus conſtare poſſunt, ſi Logiſticæ axem veluti infinitam libram horizontaliter diſpo-

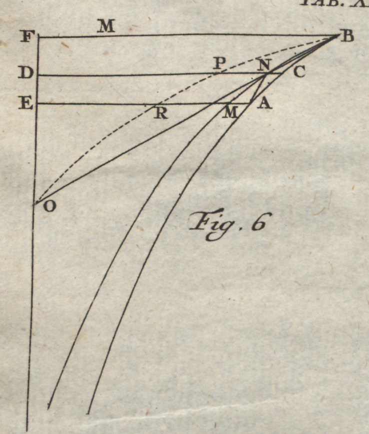
TAB. XIII. Fig. 3.

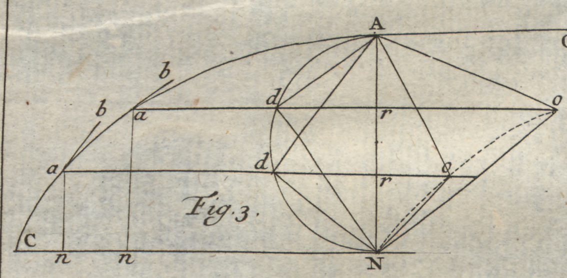
sitam accipiamus, unde Logisticæ spatia proportionaliter deficientia, æqualium tamen latitudinum, pendeant, idemque fiat in axe solidi ex Logistica circa axem rotatâ geniti, sumptis æquè crassis ejusdem solidi portionibus, &c. Habetur item, dispositis in libra finita magnitudinibus arithmeticè in infinitùm crescentibus, quales
TAB. XIII. Fig. 4. repræsentant lineæ V*u*, D*d*, L*l*, N*n*, &c. axi BG, Logisticæ AVDLN parallelæ, & ad ordinatæ partes proportionales A *u*, *ud*, *dl*, *ln*, &c. applicatæ, sed intervallis geometricè decrescentibus inter singulas relictis, ita ut geometricæ progressionis terminus libræ extremo respondeat, unde infinita magnitudo suspenditur, assignari posse centrum æquilibrii omnium ipsarum magnitudinum; & quòd si jam dictæ magnitudines ex iisdem punctis suspensæ crescerent in duplicata priorum ratione, seu procederent, ut numerorum arithmeticè crescentium quadrata, (ut se habent circuli in solido ex Logistica circa ordinatam rotatâ) centrum æquilibrii duplo propiùs fieret maximæ, & infinitæ magnitudini, ultimum libræ extremum occupanti; id enim ex duodecimo, & decimoquarto Theoremate abundè innotescit, & sua veluti sponte profluit; Hæc porro ex iis Problematibus, aut Theorematibus sunt, quæ, si nudè & extra hanc materiam proponerentur, mirabilia omnibus, nonnullis quoque determinatu impossibilia videri possent.

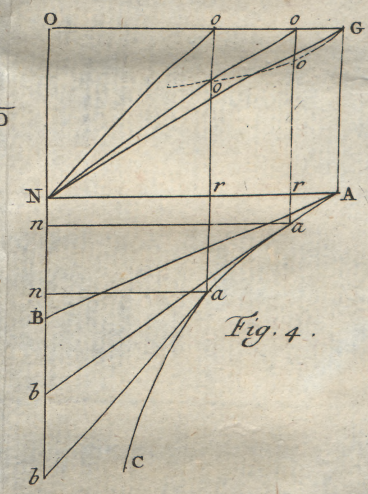
10. Porro, cùm Viro illustri demonstrationem, *num.* 5., allatam communicassem, scrupulum injecit, an satis tuta esset, ab æquiponderantia singularum superficierum cylindricarum unius solidi, cum singulis circulis alterius, ad ipsorummet solidorum æquilibrium facta deductio? monebat quippe hinc consequens fore, ut ipsarummet
TAB. XIII. Fig. 5. planarum figurarum illo modo appensarum æquilibrium fieret ex eodem puncto F, ex quo semper, PN ad *nq* esset reciprocè (ob æqualitatem homologa-

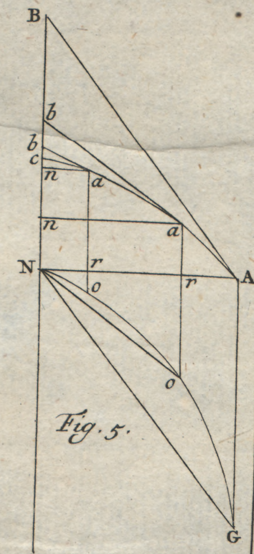

D K Q A
G R N H E
F s B S M
g n h r
O
Fig. 1.

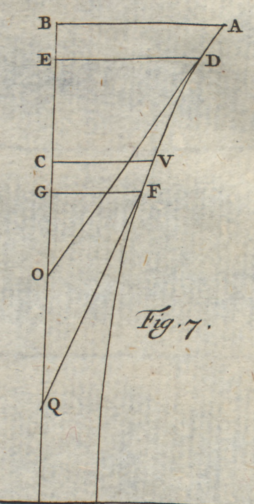

C b a b a
N r r A
o S o S
T T O
Fig. 2.

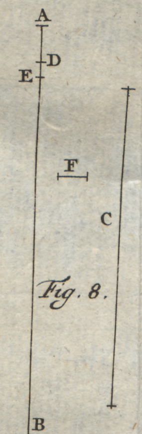

F M B
D P N C
E R M A
O
Fig. 6

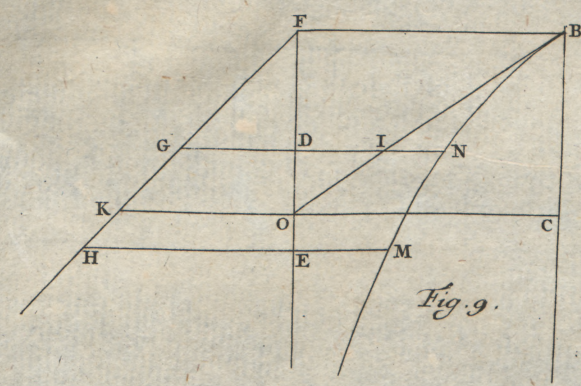

A O
b b a d r o
a d r o
C n n N
Fig. 3.


O o o G
o o
N r r A
n a
n a
B
b
b C
Fig. 4.


B
b
b
c
n a
n a
N r A
o r
o
G
Fig. 5.


B A
E D
C V
G F
O
Q
Fig. 7.


A
E D
F
C
B
Fig. 8.


F B
G D I N
K O C
H E M
Fig. 9.

logarum linearum) ut distantia qF ad distantiam FP; unde solida ex figuris circa axem, æqualia forent solidis ex iisdem circa basim revolutis, quod est absurdum: reposui tamen, vetustam illam esse, ac sæpius convulsam exceptionem Cavallerianæ methodo dudum oppositam; sive prorsus indivisibilia non admitteret, eo modo, quo sub geometricam considerationem cadunt, sive saltem respueret in Staticæ negotio, pro illis reponeret solida quàm minimùm crassa, ut hinc tubos cylindricos, illinc cylindrulos æqualis crassitiei, sive inscriptos, sive circumscriptos præfatis solidis, atque ab iis differentes minori differentiâ qualibet datâ, & tum demonstrationem, (utut minori compendio) pari evidentiâ successuram; enimverò ad libram hinc inde appositis æquiponderantibus quantitatibus, atque his, aliis rursus æquiponderantibus additis, modò totidem hinc, totidem inde suspendantur, & utrumque aggregatum æquiponderare. In allato figurarum planarum exemplo conditionem non servari, quippe lineæ PN axi parallelæ non totidem sunt, quot lineæ qn parallelæ basi, siquidem illæ ab basim, hæ ad axem, quibus respectivè applicantur, sunt computandæ, atque eò plures ex alterutra parte sunt, quàm ex altera, quantò major est linea, ad quam ordinantur, & quantò majori invicem intervallo distant; ideo cautum fuisse in demonstratione (quemadmodum & facit Torricellius de dimens. parab. propos. 20. cujus hæc nostra imitatio est) ut linea Fq æqualis sumeretur ipsi QF, ut circulus radii nq, qui ad illam applicatur, comparari legitimè posset cum cylindrica superficie ex QN rotatâ, & ad punctum Q, distantiamque QF suo solido insertâ; atque utinam id observasset, qui solidum hyperbolicum infinitæ latitudinis metiri aggressus est, non enim illud (perinde ac infinitè longum Torricelli) finito cylindro æquale tam præproperè conclusisset, neque exemplis aliis indivisibilium

lium usum in suspicionem adducere tentasset. Si methodi certitudo ex illegitimis applicationibus sit æstimanda, nec Veterum Inscriptiones extra discrimen futuras, quippe iis abusus est Guarinus in suo Euclide methodico, ubi Spheroidis, & Conoidum omnium superficiem ad mensuram vocat, atque ubi generaliter cujusvis Conoidis superficiem ad cylindricam circumscriptam se habere statuit, ut genitrix figura ad rectangulum circumscriptum: Fermatius quoque analyticæ suæ methodi, perquàm pulcherrimæ, ac simplicissimæ, applicatione ad tangentem Quadratricis determinandam infœliciter usus est, necnon Wallisius compositione motuum ejusdem Quadratricis perperam considerata, aliam quidem, sed æquè à veritate alienam, ejusdem tangentis constructionem adornavit, utì aliàs monuimus. Item Sturmius, Guarinus, Borellius, Rinaldinus circa Spiralis Archimedeæ longitudinem hallucinati sunt, quamquam rem se demonstrasse putaverint, ut in Epist. Geometr. ad P. Cevam ostendo. Quamquam Viris Clarissimis, ac de Geometria optimè meritis, quorum primus superstes adhuc hanc scientiam novis inventis illustrat, nolim quidpiam hoc loco detractum esse, quum, si quid ipsis fraudi fuerit, humanæ id vitio conditionis, cui omnes obnoxii sumus, tribuendum sit, præclarissimis verò operibus ita sibi nominis immortalitatem comparaverint, ac posteros devinxerint, ut nihil his decedere possit, ex quò sublimioribus meditationibus distracti, haud satìs attentè perpendere curaverint leviora hæc, quæ ad methodi nostræ defensionem, Lectorumque, quibus prodesse cupimus, cautelam adnotare coacti fuimus, *ne à magnis*, ut ait ille, *nominibus præjudicium fieret Veritati.*

11. Opportunè autem (ut ejusdem propositionis usus ampliùs pateat) hìc illam applicare juvat curvis superficiebus, quas gignit curva quælibet BNV, tum circa basim

basim FB, tum circa axim FQ rotata; utique enim centra gravitatis ejusmodi curvarum superficierum à circulo suæ basis distabunt in iisdem rationibus, in quibus centrum gravitatis curvæ lineæ genitricis, tum ab axe, tum à basi distabat; idque, facta eadem constructione, eodemque ratiocinio manifestum est, sumpto puncto N in curva circa basim, & puncto *n* simili, eodemque (seu tantumdem ab homologis extremis distante) in curva circa axim rotanda; utique cùm sit linea PN ad *qn*, ut distantia *q*F ad distantiam FP (propter æqualitatem homologarum linearum), etiam peripheria radio PN in curva superficie descripta per rotationem circa basim, ad peripheriam radio *qn* descriptam in altera curva superficie ex rotatione ejusdem curvæ circa axem, erit, ut distantia hujus à termino F ad distantiam illius ab eodem termino; æquiponderant igitur ex F dictæ peripheriæ, aliæque omnes per quævis curvæ genitricis puncta in utraque illa conversione transeuntes, totidemque in una sunt, quot in altera termini æquiponderantes; nam dictæ peripheriæ eamdem curvam, & ad idem prorsus punctum stringunt, unde non plures hinc, quàm illinc computantur; quare & ipsæ superficies curvæ ex eodem puncto F æquiponderabunt, eritque reciprocè, ut una superficies ad alteram, sive ut distantia centri gravitatis curvæ à linea, circa quam hinc, & illinc convertitur, ita distantia centri gravitatis hujus ad distantiam centri gravitatis illius, uniuscujusque nimirum à circulo suæ basis per F transeuntis. Unde mirùm, quot Conoidum superficies centrum gravitatis sibi determinent. Quæcumque autem de solidis rotundis, deque rotundis superficiebus ex eadem figura, vel linea qualibet circa axem, & circa basim rotata dicta sunt, perinde similiter obtinere in Ungulis solidis, aut superficialibus, plano per axem, vel basim transeunte, & ad eumdem angulum utrinque inclinato, abscissis ex cylindris super easdem

TAB. XIII. Fig. 5.

figuras erectis, clariùs est, ac inter Geometras magis vulgatum, quàm ut hìc à nobis exponi indigeat, ob proportionalitatem, tum triangulorum similium, quibus Ungulæ solidæ secantur, cum circulis rotundorum solidorum, tum laterum Ungularum superficialium, cum peripheriis circularibus rotundarum superficierum homologarum.

12. Quamquam in nostro proposito Logisticæ, utique tota curva centro gravitatis carere censenda est, adeòque ad invenienda utriusque superficiei curvæ, ambarum ejus Conoideon, centra gravitatis, observatio nostra in hoc, & similibus casibus inutilis manet; Ratio est, quia si quod haberet gravitatis centrum curva
TAB. XIV. Fig. 8. Logistica BNM, illud certè in axe non foret, eò quòd curva suam convexitatem illi obvertat; sed neque in ulla ab axe distantia; quantilla enim hæc foret, circumferentia à tali centro descripta, in conversione curvæ circa axem, determinatæ alicuius longitudinis esset, & rectangulum ex ipsa in curvam infinitam Logisticæ, adeòque & superficies curva, in rotatione circa axem descripta, immensæ magnitudinis foret; cùm tamen finitam esse sic demonstretur. Ad quamlibet ordinatam DN, aut illi parallelam FAB, applicentur ipsæ tangentes NC, MG; itaut, ductis axi parallelis NAO, MHO, secetur AO æqualis tangenti NC, & HO, æqualis tangenti MG; atque ita semper, quousque compleatur figura AOOLF. Dico (non in Logistica modò, sed in quavis curva, facta simili constructione) spatium hujus figuræ esse ad curvam superficiem, ex rotatione curvæ MN circa axem DE, ut radius ad circumferentiam alicujus circuli; id quod valet etiam de partibus proportionalibus, putà superficie OAHO, comparata ad portionem curvæ superficiei à curva MN, parallelis MHO, NAO intercepta, progenitam; sumptâ siquidem quantumlibet parvâ tangentis particulà Nr, aut Mr, ac ductâ parallelâ rs; cùm sit tota NC,

idest

ideſt OA, ad Nr, ut DN, vel FA, ad As (eodemque modo GM, ſeu OH ad Mr, ut EM, vel FH, ad Hs) erit rectangulum OAs æquale rectangulo ex DN in Nr, & OHs æquale rectangulo ex EM in Mr; atque ita ſemper; itaque Ungula ſuperficialis ex cylindrico ipſi curvæ NM inſiſtente, reſecta plano per axem tranſeunte, & per 45. gradus ad planum baſis inclinato (in qua conſequenter erectæ forent ad ſingula curvæ puncta rectæ lineæ ipſis ordinatis æquales) erit æqualis ſpatio congruenti, à curva OOL terminato, quippe tam benè coincident rectangula DNr, EMr cum portionibus talis ſuperficiei, ob tangentes infinitè parvas cum curva coincidentes, quàm coincident rectangula OAs, OHs, cum ſpatio ipſo à curva OO terminato, ob infinitè parvam ſingulorum rectangulorum latitudinem; prædicta verò Ungula eſt ad curvam ſuperficiem, à curva circa axem rotata genitam, ut radius ad circumferentiam circuli, quippe in Ungula ordinantur ipſæ DN, EM, punctis curvæ inſiſtentes, in ſuperficie verò rotunda ordinantur earumdem peripheriæ; itaque ſpatium ſic determinatum à curva OOL erit ad rotundam ſuperficiem ſolidi ex curva circa axem rotata, ut radius alicujus circuli ad ejus circumferentiam; & quoties ſpatium AOOLF finitum erit, etiam illa rotunda ſuperficies pariter determinatæ magnitudinis eſſe convincetur; eſt autem illud ſpatium finitum, quoties AO, HO, ideſt ipſæ tangentes NC, MG, in immenſum non excreſcunt, utì accidit in noſtro caſu, in quo ſemper fiunt minores, utpote æquales potentia eidem quadrato ſubtangentis, ſimul cum quadrato ordinatæ minoris, ac minoris in infinitum; quò conſtat ſpatium AOLF, cujus longitudo determinata AF, latitudines autem ubique AO, HO, & cæteræ, nedùm non infinitæ, ſed ſemper minores, uſque ad ultimam FL ſoli ſubtangenti æqualem, infinitum eſſe non poſſe, im-

mò esse minus rectangulo FAO illud circumscribente.

13. Manifestum est porro, curvam OOL in hoc casu esse hyperbolam æquilateram, axe recto FA, semitransverso FL, subtangentis longitudinem æquante, descriptam, quippe ultima tangentium, evanescente ordinatæ quadrato, erit potentiâ, adeòque & longitudine, æqualis soli subtangenti; intellecta igitur FD eidem æquali, ut integer axis transversus sit DL, atque ordinatis OP, OP; quoniam differentia quadrati tangentium, sive ejus æqualium HO, vel AO, ideſt FP, FP, à quadrato subtangentis FL, est quadratum ordinatæ EM, aut DN, sive ipsarum OP; erit semper rectangulum DPL æquale quadrato PO, adeòque hyperbola LOO æquilatera.

14. Est autem hyperbolicum spatium AOOLF æquale rectangulo ex subtangente Logisticæ in parabolicam curvam illam, quæ Logisticam perpendiculariter secat, juxta determinationem *cap. 5. num.* 14. propositam, quæque eamdem, seu æqualem suscipit ordinatam, aut eisdem axi parallelis interiicitur; sit enim ejusmodi parabola F*t*T, cujus semiparameter æqualis subtangenti Logisticæ, videlicet FL, tangenti in puncto *t*, seu ipsi curvæ perpendicularis *t*X, abscindens ex axe infra ordinatam *ty* ipsam *y*X æqualem semiparametro; seu ipsi FL (juxta ibidem dicta); itaque X*t*, æquabitur HO, & ducta quavis axi parallela, erit X*t* ad X*y*, seu OH ad LF, ut quævis tangentis portio, lineis infinitè proximis H*t*, *sq* intercepta, ad ordinatæ *yt* portionem, iisdem lineis interpositam; rectangulum itaque ex hac ordinatæ portione in HO semper æquale erit rectangulo ex constante linea FL in illam tangentis portionem, omniaque rectangula spatio hyperbolico adscripta æquabuntur rectangulo ex FL in curvam parabolicam F*t*T, ac partes partibus correspondentibus; itaque rectangulum sub circumferentia, radio FL,

seu

ſeu ſubtangentis Logiſticæ deſcripta, in curvam parabolicam FtT, æquale erit curvæ ſuperficiei rotundi ſolidi ex Logiſtica NM circa axem voluta progeniti; partes etiam correſpondentibus partibus æquabuntur, & talis curvæ ſuperficiei portiones, planis quibuſcumque DN, EM interceptæ, erunt ut partes parabolicæ curvæ tT, inter axi parallelas ab iiſdem curvæ punctis ductas concluſæ.

15. Affine huic eſt, quod in ſolido ex Tractoria circa axem revoluta nuper detexi, nempe applicatis tangentibus ad ſingula ordinatæ puncta, quæ, utpote æquales, conflabunt ſuperficiem parallelogrammam $AOPF$, tangentis longitudine, & ordinatâ contentam, erit infiniti illius ſolidi ſuperficies æqualis ſuperficiei cylindricæ ex $FAOP$ circa axem revoluto, quippe quæ pariter ad parallelogrammum OF ſit, ut circumferentia ad radium; quapropter etiam curva Tractoria gravitatis centro carere dicenda erit, ſicut Logiſtica, & aliæ quævis interminatæ lineæ, finitam ſuperficiem ſui rotatione deſcribentes.

CAPUT XIII.

Theorema Decimumquintum in quinque partes diviſum aliàs demonſtratum. Figurarum ad eumdem axem compoſitarum, ſi portiones unius proportionentur ordinatis alterius, quomodo tangentes determinandæ. Aliâ demonſtratio primæ, & tertiæ partis hujus Theorematis. Hyperbolicum ſpatium æquale rectangulo ordinatæ in alteram Logiſticæ ſubtangentem. Tangens Expanſæ Ungulæ cylindricæ determinata. Generalis conſtructio tangentium pro omnibus ungulis etiam ex cylindro non circulari abſciſſis. Solidi ex Logiſtica infinitè longi ſuperficiem finitam eſſe rurſus demonſtratur. Hyperbola Ungulæ Logiſticæ correlata, ut pa-

rallelogrammum Logistico trilineo circumscriptum ad ipsum trilineum, ita cylindricus Logisticus ad truncum suum, ita & Hyperbolicus cylindrus ad truncum suum. Rotundum solidum ex Hyperbola ad rotundum ex Logistica, ut inscriptum Hyperbolæ parallelogrammum ad Logisticæ subtangentis quadratum. Cæteræ Theorematis partes ex longioribus Logarithmorum tabulis determinandæ. Auctoris verba circa hyperbolæ quadraturam ex Tractatu de evolutione curvarum adducta. Hyperbolæ quadratura per Tractoriam.

1. ULtimum Hugenii Theorema quinque partes complectitur, quas demonstraturus, & simul referam, & suis asteriscis, ordinis, & claritatis servandæ gratia, distinguam: ait igitur: *1. *Notum jam est, hanc Logisticam lineam tetragonismo hyperbolæ deservire, post demonstrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa hyperbolica spatia, duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjecta.* *2. *Quòdque si duo fuerint hujusmodi spatia, in quibus ordinatæ unius sint, ut AD ad HG & ordinatæ alterius, ut BF, ad CE, hæc spatia erunt inter se, ut lineæ DG, & FE.* *3. *Nondum autem, quod sciam, notatum fuit, hæc ipsa spatia hyperbolica esse ad parallelogrammum Hyperbolæ (sic voco parallelogrammum, cujus latera sint duæ ad utramque asymptoton ordinatæ ex eodem puncto sectionis ductæ) ut unaquæque linearum DG, FE ad subtangentem FO.* *4. *Adeò ut, si parallelogrammum Hyperbolæ supponatur partium 0,4342944819, quodlibet hyperbolicum spatium, duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjectum, erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet, ut differentia Logarithmorum numerorum, exprimentium proportionem ordinatarum, ad numerum 0, 4342944819; acceptis scilicet Logarithmis decem notarum ultra characteristicam.*

TAB. XIII. Fig. 6.

cam. **5. Hinc porro facilè est veritatem ostendere Tetragonismi Hyperbolæ, abs me propositi in Tractatu de Evolutione linearum curvarum, quem Horologio meo oscillatorio inserui.*

2. Primam, & secundam partem jam, *cap. 6. num.* 2. 3. & 4, abundè ostendimus; tertiam quoque partem, adeòque & reliquas ex his consequentes, ibidem *num.* 6. & 7., in aperto posuimus, ut nihil opus sit superaddere: plenioris tamen scientiæ, atque Lectorum utilitatis gratiâ, rursus eadem demonstrare aggrediar, generali hoc Lemmate præmisso, quod & in præcedentibus quadantenus attigimus: nimirum. Si duo spatia quælibet AQRB, SRB ad eumdem axem BR comparata fuerint, itaut semper unius portiones, à termino QR computatæ, proportionales sint ordinatis alterius, putà FNQR ad OTRQ, ut FS ad TP; manifestum est, quòd constans quædam linea K se habebit ut parameter comparationis, (eo modo, quo *capite* 4. *num.* 2. parametrum Logisticæ exposuimus) itaut, si K in FS adæquet spatium FNQR, etiam K in TP adæquet spatium TOQR; fiat ergo, ut K ad FN, ita FD ad FS, (seu ponatur NFD rectangulum æquale spatio NFRQ) dico junctam DS tangere curvam RPS in S. Patet id, tum ex *cap. 6. num. 8.*, ubi generaliter monuimus, in curvis præmissæ conditionis, esse GM ad SF, ideſt, ob triangula similia, FB ad FD, aut rectangulum alteri figuræ adscriptum BFN ad NFD, ut idem rectangulum ad spatium NFRQ, quod propterea æquabitur ipsi NFD rectangulo, eritque, ut K ad FN, ita FD ad FS, quippe cùm tam extremorum, quàm mediorum rectangula eidem NFQR spatio sint æqualia; tum etiam constat ex dictis *capite 5. num. 6. & 7.*, ubi ex motuum compositione hanc ipsam tangentium constructionem, datâ præscriptâ figurarum conditione demonstravimus; tum denique hoc argumento; ordinentur

TAB. XIII. Fig. 7.

nentur hinc inde OTV, *otu* secantes curvam in P, *p*, rectam verò DS in V, *u*; quoniam ex constructione est spatium NFRQ æquale rectangulo NFD; est verò NF*t* minus spatio NF*to*, & NFT majus spatio NFTO in figura dextra, ubi curvæ RS convexum axem respicit, & è contra in figura sinistra majus NF*t*, quàm NF*to*, minus NFT quàm NFTO, ubi curvæ RS concavum axi obversum est, erit residuum ex NF in TD, aut aggregatum ex NF in *t*D, minus spatio *ot*RQ, majus spatio OTRQ in prima figura, & è contra majus spatio *ot*RQ, minus OTRQ in secunda, seu respectivè minus, & majus, majus, & minus rectangulo ex K in ordinatam *tp*, TP, quippe quòd juxta constructionem tali spatio æquatur; habebit ergo NF ad K, idest SF ad FD, aut *ut* ad *t*D, VT ad TD, minorem, & respectivè majorem in prima figura, seu majorem, & respectivè minorem rationem in secunda, quàm habeat *tp* ad eamdem *t*D, seu TP ad eamdem TD; ideòque *tp*, & TP in prima figura majores erunt, quàm *ut*, & VT, minores autem iisdem respectivè sumptis in secunda Lectoris dexteram respiciente; & ideo puncta curvæ P, *p*, erunt utrobique extra rectam DS; quæ propterea tangens erit. Quod fuerat demonstrandum.

* *Animadvertendum in figura sinistra hujus Schematis, in quo duæ figuræ AOQR sunt decrescentes ad partes AB, tertiam iisdem litteris notatam decrescentem ad partes oppositas RQ (quòd attinet ad hoc propositum) superfluere, neque ad hoc notatam esse, ut huic constructioni inserviat, quum evidens sit, numquam contingere posse, ut, cavitate curvæ RSG ad axem RB conversa, figura superior QRBA ad partes RQ deficiat; esset enim rectangulum NFD, non æquale, sed majus spatio NFRQ.*

TAB. XIV. Fig. 1. 3. Cùm igitur, ex dictis *cap. 6. num. 4.*, lineæ in Logistica QRS axi BV parallelæ, veluti FS, PR, sint

ad

ad invicem, ut spatia hyperbolica NORQF, ORQP (existentibus ABQ asymptotis, ordinatisque FN, PO, QR alteri asymptotorum parallelis) patet spatium hyperbolicum ORQP æquari rectangulo OPD, ex ordinata OP in alteram Logisticæ subtangentem PD; unde constat, quomodo Logistica Hyperbolæ quadraturæ conducat, uti in prima hujus Theorematis parte asserebatur; secundam partem citra petitionem principii probare hinc nequeo, sed satis evidenter præostensam habes loco citato. Tertiæ partis demonstratio sic erit instituenda. Rectangulum OPD æquale est, ex dictis, spatio hyperbolico ORQP; habebit ergo parallelogrammum hyperbolæ inscriptum KOPB ad spatium OPQR eamdem rationem, quam idem habet ad rectangulum OPD; idest, quam basis BP, seu TR ad PD; aut, ob triangulorum similitudinem, quam subtangens Logisticæ GT ad axi parallelam RP. Quod erat demonstrandum.

4. Obiter notare potes in demonstratione (*num.* 2.) allata, quot curvarum tangentes geometricè determinari queant, præscriptam nimirum conditionem suscipientes. In Expansa Sphærica superficie, sive Ungula quavis cylindrica in planum extensa (qualem in Demonstrationibus Vivianeorum Problematum considera- TAB. XIII. Fig. 8.
vimus) specimen hìc dumtaxat daturi sumus. Esto ejusmodi superficies Ungularis Expansa BQSC; cui inversè ad eumdem axem altera similis, & æqualis, sive eademmet replicata, ANBQ applicata esse intelligatur. Constat, ex Propositione quinta Demonstrat. Vivian. Probl., fore totam superficiem BAQ ad partem ANFQ resectam quavis ordinata NF, secante alteram curvam in S, ut ordinata BC ad FS, quia ordinata FN tantumdem distat à basi AQ in figura ABQ, quantùm FS à vertice Q figuræ QBC; itaque, si fiat rectangulum NFD æquale spatio ANFQ, juncta DS

erit tangens, juxta ea, quæ (*numer.* 2.) generaliter demonstravimus. Et si supponatur QBC esse Ungula plano semiquadrantaliter inclinato abscissa, seu eadem, ac figura sinuum inscripti quadrantis BCI, quem axi parallela SL secet in G, tangat verò in eodem puncto GK, erit tum FD æqualis KG; demisso enim sinu GE, ac juncto radio GB, quemadmodum SF æquatur sinui GE, erit FN æqualis sinui GL, seu EB; est autem superficies ANFQ æqualis radio BC, vel BG in ipsam EG, vel BL; (utì constat ex eadem Propositione quinta, vel ex decimaquinta particulatim acceptis) itaque rectangulum NFD æquatur ipsi BGE; porro hoc æquale est EB in KG, propter GB ad EB, ut KG ad GE; itaque NFD æquatur EB in KG, suntque NF, EB æquales; ergo & FD æqualis erit tangenti GK; eidemque quantitati æqualis erit, (idest semper erit DF ad FQ, ut tangens ad arcum lineæ QF congruentem antequàm in planum evolveretur, utì est hic arcus GI) etiam si Ungula semiquadrantalis non sit; curvarum enim eumdem axem, & ordinatas proportionales habentium eadem est, respectu ejusdem à vertice altitudinis, constans subtangens FD.

5. Quinimo & si Ungula non ex circulari cylindro, sed ex parabolico, hyperbolico, aut alterius generis curvæ insistente resecta foret, eademque posterior constructio locum obtineret, quippe & in illis hoc semper evenit, ut (si fuerint semiquadrantales, idest inclinatione semirectâ abscissæ) inscriptâ figurâ genitrice (quæ cylindri basis erat) BCGI, ductâque axi parallelâ qualibet SGL, erit SL æqualis arcui curvæ GC; nam & tota BQ æqualis est curvæ IGC, circa quam in cylindro convolvebatur; & portio QF æqualis portioni IG, utpote suscipiens ordinatam FS æqualem sinui GE, cui æqualis erigebatur in superficie cylindrica ad punctum G nondum expansâ, adeòque & reliqua FB, seu SL æqua-

æqualis reliquæ portioni G C. His itaque existentibus, ductâque ad punctum G tangente genitricis curvæ G K, atque huic positâ æquali F D, oportet, junctam D S tangere curvam Ungulæ sic expansæ; etenim hinc inde ductis parallelis V P H *m* R T axi propiori, *h u p m r t* remotiori, secantibus lineas, ut in figura videre est; cùm sit D F ad H V, vel *h u*, ut F S ad S H, seu S *h*, vel K G ad tangentem G *m*, positâ jam D F æquali K G, erit prædicta G *m* æqualis H V, seu *h u*; verùm propter S L, seu H T, vel *h t* æqualem curvæ G C, & P T, vel *p t* æqualem R C, seu *r* C, erit H P, vel *h p* æqualis curvæ G R, vel G *r*: estque R G minor, sicut è contra *r* G major tangente *m* G; itaque H V major est quàm H P, minor verò *h u*, quàm *h p*; & utrobique puncta V, *u* rectæ D S ultra curvam Q P S *p* C: tangit ergo, utì propositum fuerat; eademque F D subtangens erit omnium aliarum Ungularum etiam non semiquadrantalium, propter ordinatas ad eadem axis puncta F semper proportionales.

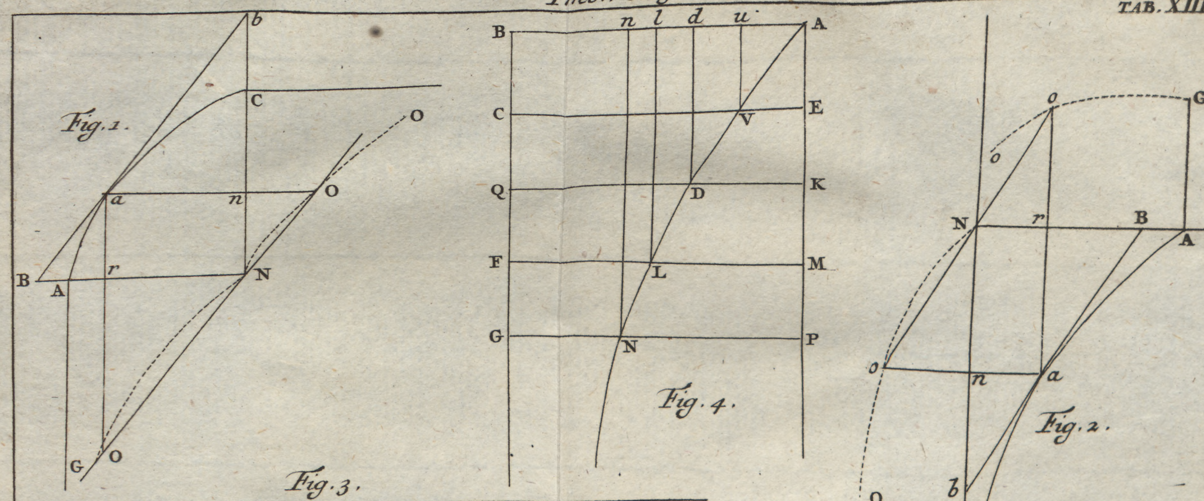
6. Quanta hinc, Deus bone, Veritatum seges enascitur! At mihi non in hoc campo seritur, metiturve, antequàm aliàs promissum Sphærocylindricarum Sectionum tractatum invulgem; Unum hoc non dissimulabo ad Logisticam pertinens, quo simul usum doctrinæ quadantenus insinuabo: nimirum, superficiem ex Logistica circa axem revoluta finitam esse, utì supra (*capite præcedenti, num.* 12. & 13.) jam monuimus, ex quò Ungula semiquadrantalis ex cylindrico super Logisticæ curva erecto æqualis foret spatio hyperbolico ibidem designato, hinc etiam sponte profluere. Esto enim talis Ungula cylindrica in planum extensa F B S S, cum inscripta sibi Logistica genitrice F B N M; ductâ igitur axi parallelâ A N S, erit ubique A S æqualis curvæ B N, & tangens Ungulæ ad punctum S erit S D, itaut D T subtangens æqualis sit tangenti N C Logisticæ ad punctum N; æqualis est ergo potentia D S, tum tangenti C N,

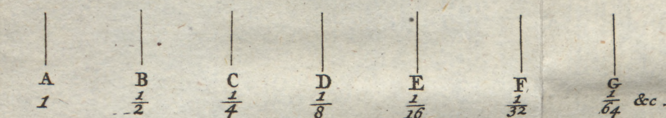
TAB. XV. Fig. 2.

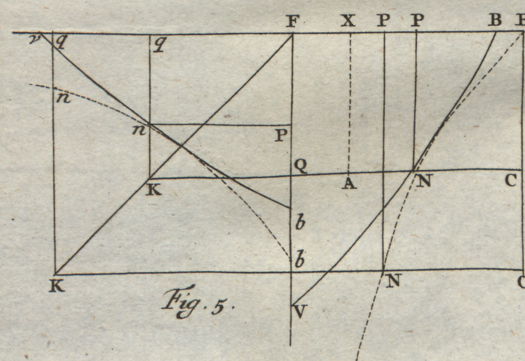
CN, (ideſt ordinatæ AO in ſpatio hyperbolico, quod loco citato determinavimus) tum ipſi TS, ſeu FA; itaque juncta FO erit æqualis ipſi DS, ſed & inter eaſdem parallelas conſiſtunt; æquidiſtat igitur FO tangenti DS; & hoc ſemper; figura igitur FLOO eſt correlata Ungulæ FBSS; illique propterea eſt æqualis integrè, & particulatim, juxta doctrinam *cap.* 8. *num.* 3. Immo & hoc ipſo ratiocinio generaliùs concepto, poſſet è contra eadem de Ungularum tangentibus determinatio in omnibus demonſtrari. Hinc enim habetur, figuram, ex tangentibus CN ad FB applicatis, eſſe Correlatam Ungulæ FBSS, (quæcumque fuerit curva BNM) atque adeò tangentes Ungulæ eſſe parallelas ramis figuræ ex ipſis CN, cui integrè, & particulatim correſpondet, ex dictis *cap. præced. num.* 12., illationem firmantibus iis, quæ *cap.* 8. circa finem *num.* 5. monuimus.

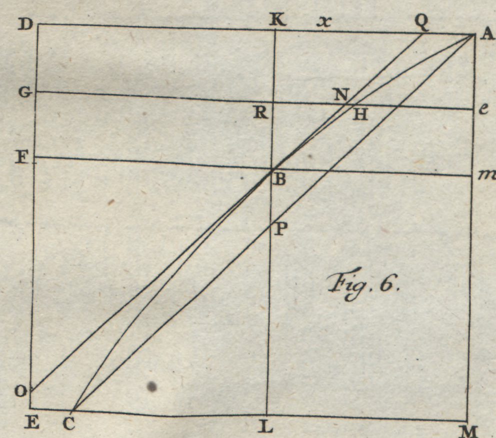
TAB. XIV. Fig. 1. 7. Jam & illud obſervandum volo, quòd ex ſecunda hujus Hugeniani Theorematis parte manifeſtò liquet, ſolidum hyperbolicum ex ſpatio OPQR circa OP rotato, eſſe ad ſolidum ex ſpatio Logiſticæ correſpondente TRQB circa BQ in eadem ſemper ratione, in ea videlicet, in qua parallelogrammum Hyperbolæ inſcriptum KOBP ad quadratum ſubtangentis Logiſticæ TG; quoniam enim ſpatia hyperbolica lineis OP abſciſſa à termino QR proportionalia ſunt axi parallelis PR in trilineo Logiſticæ RQP, ſi cylindricus excitetur ſuper ſpatio OPQR, idemque ſecetur plano per OP tranſeunte, ad baſim ſemiquadrantaliter inclinato, erit cylindricus ejuſmodi ad truncum inferiorem, plano ſecante, & baſi interceptum, ut parallelogrammum RPQ ad trilineum QPR, (id quippe convincit demonſtratio, quâ in Vivianeis uſus ſum ad Propoſit. ſeptimam, *pag.* 52. propoſitam, ubi oſtendi, cylindrum ex ductu quadrati *ac*, in figura loco citato adhibita, in Expanſam ſuperf. ſphericæ IZAC, eſſe ad truncum

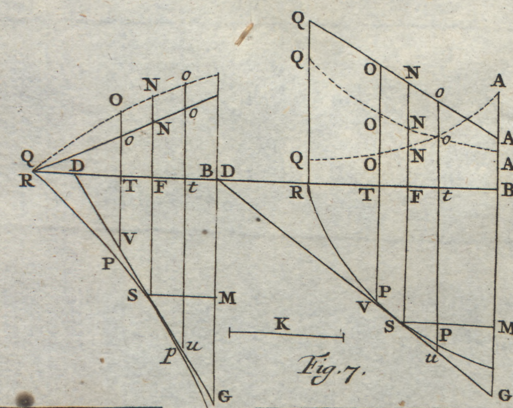
cx

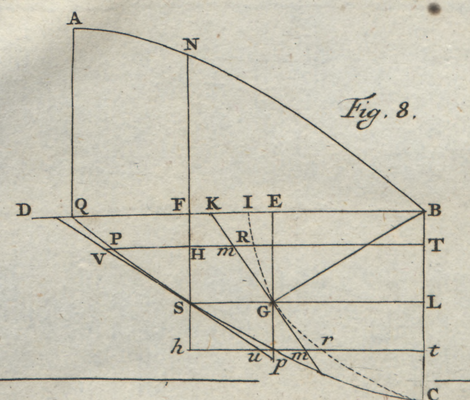

Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 2.
Fig. 3.


A 1
B 1/2
C 1/4
D 1/8
E 1/16
F 1/32
G 1/64 &c.


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 7.


Fig. 8.

ex triangulo IC*l* in eamdem, ut quadratum, ſeu parallelogrammum *cali*, Expanſæ inverſè poſitæ *ida* circumſcriptum, ad talem Expanſam; quippe id ex hac ſola affectione pendebat, quòd eſſet ſemper AZIC ad partem FZAC, ut linea *ac*, ſeu RP ad P*d*, prout in aliis bene multis figuris, ac præcipuè in caſu noſtro verificatur) ſimiliter in eadem ratione rectanguli RPQ ad trilineum QRP, erit etiam cylindricus ſuper baſi QBTR erectus, ad truncum inferiorem, interceptum eadem baſi, ac plano ſimiliter per BQ inclinato, eò quòd partes etiam ſpatii Logiſtici QBTR per ordinatas à termino TR abſciſſæ, proportionentur lineis in eodem trilineo QRP baſi PQ parallelis, uti ex primo Hugenii Theoremate, ac dividendo, conſtat; ſunt enim tales parallelæ differentiæ ordinatarum ad cavam Logiſticam, veluti ſpatia ſic intercepta differentiæ ſpatiorum iis ordinatis proportionalium; eſt igitur cylindricus ſuper OPQR, cujus altitudo PQ (ob ſemiquadrantalem inclinationem plani ſecantis) ad ſuum truncum inferiorem, ut cylindricus ſuper BTRQ, altitudine BT, ad ſimilem ſui truncum, & ſumptis conſequentium æquè proportionalibus, (eſt enim quivis truncus ad rotundum ſolidum ex baſi circa eamdem lineam, quæ eſt baſis, & plani ſecantis communis ſectio, rotata, ut radius ad circumferentiam, ut *cap.* 10. circa medium *num.* 1., oſtendimus) erit cylindricus hyperbolicus ad rotundum ex OPQR circa OP, ut cylindricus Logiſticus ad rotundum ex ſua baſi circa BQ; ac permutando, ut ille cylindricus ad iſtum, ita illud rotundum ſolidum ad hoc, quod ultimò expreſſimus. Verùm illi cylindrici in compoſita ſunt ratione altitudinum PQ ad BT, ſeu, ſumptâ communi latitudine TG, PQ in TG ad GTB, & baſium, ſcilicet ſpatii hyperbolici, quod æquatur (ex dictis ſuprà *num.* 3.) rectangulo OPD, ad ſpatium Logiſticum, quod æquale eſt (ex

 ſæpe

sæpe dictis) rectangulo PQ in TG; itaque & rotunda solida supra descripta, Hyperbolicum ad Logisticum, in composita erunt ratione, rectanguli OPD ad PQ in TG, & hujus ad GTB, idest, ut OPD ad GTB; quæ denique cùm componatur ex PD ad BT, seu PR, vel dicas ex TR, seu BP ad TG, & ex OP ad eamdem TG, dabit rationem rectanguli hyperbolæ inscripti OPBK ad quadratum subtangentis Logisticæ TG. Quod erat demonstrandum.

8. Quarta pars demonstratione non indiget, sed prolixiorum, quàm apud nos sint, tabularum Logarithmicarum calculo, quippe assignato longitudini subtangentis Logisticæ numero, per quem Hugenius hyperbolæ parallelogrammum designat, tunc distantia duarum ordinatarum Logisticæ exhibebit Logarithmum rationis earumdem ordinatarum, (juxta naturam hujus curvæ *cap.* 1. *num.* 3. indicatam) seu differentiam Logarithmorum respondentium numeris, inter quos est ordinatarum Logisticæ, ac consequenter & ordinatarum Hyperbolæ, ratio; unde cùm sit subtangens ad intervallum ordinatarum Logisticæ, ut parallelogrammum Hyperbolæ ad congruum spatium hyperbolicum; ideoper Logarithmicas tabulas facilè erit hinc æstimare, & calculo eruere numerum correspondentem cuilibet dato hyperbolico spatio, datâ ejus extremarum ordinatarum ratione.

6. Quinta similiter Theorematis pars, pertinens ad Tetragonismum Hyperbolæ à Clarissimo Auctore in Tractatu de Evolutione curvarum exhibitum, vel de modo quadrandi Hyperbolam per rectificationem curvæ parabolicæ intelligenda est, vel per Logarithmos; utrumque enim in præfato libello insinuatum video; si primùm, jam, ex *cap. præcedenti num.* 14, habes hyperbolicum spatium æquale esse rectangulo ex Logisticæ subtangente, seu generaliùs, ex semitransverso latere Hyperbolæ in curvam parabolicam, dupla parametro descri-

descriptam, iisdemque axi parallelis terminatam. At si (quòd aptiùs judicarim) de altero modo per Logarithmos accipienda sit, quemadmodum & præcedens pars, solo calculo indiget, ac ingentium Logarithmorum tabulis, quæ etsi mihi in promptu essent, vereor, ut otii, & patientiæ satis habiturus sim, ut ejusmodi calculum expenderem, quem idcirco laborem his, qui se ejusmodi studiis exercere voluerint, integrè, & ultro relinquam, siquidem tempus admonet, ut receptui canam, ac Philosophiæ me restituam; ipsum tamen locum ab Hugenio hìc citatum, ex ejus Tractatu de Linearum Evolutione *pag.* 106., Jacobi Panzanini Viri Cl. aliàs abs me infra meritum laudati operâ descriptum (quippe exemplari carebam) hìc subjungere non gravabor, ne quid Lectoribus desit ad hanc Logisticæ proprietatum ab Hugenio propositarum demonstrationem illustrandam. Inquit igitur Hugenius:

10. *Quæcumque verò Problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet verò proximam solutionem per numeros accipiunt, Logarithmorum admirabili invento. Cùm per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quàm proximè explicetur; est autem regula hujusmodi.*

Sit DAB portio hyperbolæ, cujus asymptoti CS, CV, ductis DE, BV parallelis asymptoto SC. TAB. XIV. Fig. 2.

Accipiatur differentia Logarithmorum, qui conveniunt numeris, eamdem inter se rationem habentibus, quam rectæ DE, BV, ejusque differentiæ quæratur Logarithmus, cui addatur Logarithmus hic (qui semper est idem) 0, 36221, 56887. *Summa erit Logarithmus numeri, qui spatium DEVBAD designabit, tribus rectis, & curvâ DAB comprehensi, in partibus, qualium parallelogrammum DC est* 100000, 00000. *Unde porro facilè quoque habebitur area portionis DAB.*

Sit exempli gratia proportio DE ad BV ea, quæ 36 *ad* 5.

Ab

Ab	1,55630,25008,	*Logarithmo* 36.
Auferatur	0,69897,00043,	*Logarithmus* 5.
Erit	0,85733,24965,	*Differentia Logarithmorum.*
Et	9,93314,92856,	*Logarithmus differentiæ.*
Cui addatur	0,36221,56887,	*Logarithmus semper addendus.*
Fit	10,29536,49743,	*Logarithmus spatii DEVBAD*

Habebit hujus Logarithmi numerus 11 *caracteres, quum characteristica sit* 10. *quæratur itaque primò numerus proximè minor, conveniens invento Logarithmo, qui numerus est* 19740. *Deinde ex differentia Logarithmi ejusdem, & proximè eum in Tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur* 81026, *scribendi post priores, ut fiat* 197408, 10260, *addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum* 11; *est ergo area spatii DEVBAD proximè partium* 197408, 10260, *qualium partium parallelogrammum DC est* 100000, 00000.

TAB. XIV. Fig. 8. Hæc Clarissimus Hugenius, cujus inventis circa Hyperbolæ quadraturam, nescio an opportunum fuerit è meditationibus nostris aliquam ad idem propositum subnectere. Ea est, quòd, si intelligatur curva BNM esse Tractoria, cujus prima ordinata FB, axis FG, sitque B vertex, F centrum hyperbolæ æquilateræ, cujus semitransversus axis FB: ducta ex quovis puncto H axi Tractoriæ parallela HM, erit triangulum, basi FB, altitudine HM, æquale hyperbolico trilineo, axis portione HB, tangente Hyperbolam ex puncto H, & curvâ interceptâ Hyperbolæ comprehenso, utì ex nostra doctrina de Figuris Correlatis deduci potest. Atque hìc esto nostræ

HUGENIANORUM THEOREMATUM CIRCA LOGISTICAM DEMONSTRATIONIS

FINIS.

L E-

LECTORI
S.

Visum fuit Appendicis loco hìc subnectere Epistolam Geometricam, dudum scriptam ad Virum Clariss. Thomam Cevam, & Poeticis, & Geometricis Opusculis Celeberrimum, tum quia simili, & uniformi cum præcedentibus stylo procedit, tum quia pluribus in locis doctrinas à nobis superiùs traditas illustrat, & variis exemplis applicat, tum quia num. 19. non contemnendam animadversionem continet ad hujus Tractatus argumentum spectantem, de Logistica *scilicet ex quodam cylindro resecta; quam æquum fuerat his* Hugenianis *circa* Logisticam *meditationibus subnectere. Vale.*




POLITECHNIKA GDAŃSKA
BIBLIOTEKA
CENTRALNA

EPISTOLA GEOMETRICA

AD VIRUM CLARISSIMUM

THOMAM CEVAM

SOCIETATIS JESU.

Nostra Doctrina de Conicæ superficiei dimensione per P. Cevam ex Pappo confirmata. Spiralium diversi generis origo. Quælibet Conica superficies quomodo in planum explicanda. & quævis plana figura quomodo Cono advolvenda. Quarumvis linearum in Coni superficie descriptarum Ichnographias determinare, & datis Ichnographiis, lineas in Coni superficie iis respondentes reperire. Curvarum transformatio, ad illas comparandas utilis. Ichnographiarum omnium, linearumque ex Coni superficie in planum explicatarum tangentes duplici methodo inventæ. Nova ejusdem supradictæ nostræ doctrinæ confirmatio. Ad Cono-cylindricæ Spiralis extensionem in planum, ostenditur Spiralis Archimedeæ, & Apollonianæ Parabolæ æqualitas. Quorumdam lapsus notati. Infinitarum Para-

rabolarum, & Spiralium comparatio. Novus Cycloidem rectificandi modus. Transversa cylindri Cycloidalis sectio Parabolæ æqualis, Ungula quoque nil nisi Parabola complicata esse dignoscitur. Rotunda superficies ex Cycloide circa basim, dupla ejus, quæ ab ipsa circa tangentem verticis rotata producitur. Cono-cylindrum invenire, cujus transversa Sectio propositæ cuilibet curvæ sit æqualis, & Ungula in quamlibet figuram datam explicetur. Ex cylindro Tractoriæ secanda est Logistica. Curva Cono-cylindrica Spiralis cuidam Parabolæ, longitudine, non positione, æqualis est. Dimensio superficiei cylindricæ, utrique spirali, & axi Coni interjectæ. Si Spiralis fuerit Geometrica, explicatâ illâ cylindrico-spirali superficie, in rectam expandetur.



PRÆ-

PRÆSTANTISSIMO GEOMETRÆ,

AC VATI ELEGANTISSIMO

P. THOMÆ CEVÆ

E' SOCIETATE JESU

D. Guido Grandus Monachus Camald. S. P.

EX quo me litteris tuis decorare cæpisti, Vir in paucis Cariſſime, nullas, aut mihi magis jucundas, aut Geometricâ eruditione magis refertas accepi, iis ipſis, quas XVI. Kal. Julii ad me deſtinaſti. In his, pari humanitate, ac ingenio, doctrinam ſecundæ Propoſitionis Appendicis meæ ad Vivianeorum Problematum Demonſtrationem illuſtrare aggrederis, & minimè contemnenda animadverſione confirmare, oſtendens ipſam cum Pappo Alexandrino conſentire, & ad novas rurſus ſpeculationes viam ſternere poſſe. Sic enim habes, totidem penè verbis tuis latinè redditis.

1. *Eſto Conus rectus DBC, cujus triangulum per axem ſit DBC, baſis verò circulus BMC: intelligatur latus DB, puncto D fixo manente, altero extremo B per circumferentiam præfatæ baſis BMC æquabiliter circumferri, eodemque tempore punctum B, æquabili pariter velocitate, ex B per lineam BD aſcendere, deſcribens in Coni ſuperficie Spiralem BSD; adeò ut eodem momento, & latus BD ſe in ſitu BD reſtituat, & punctum B aſcenſus ſui terminum D attingat, ubi & Spiralis BSD terminus erit. Manifeſtum eſt, Coni ſuperficiem, ſi evolvatur, & explicetur, in circuli ſe-* TAB. XV. Fig. 4.

TAB. XV. Fig. 5. *ctorem abituram, qualis est RGZ, cujus semidiameter RG lateri DB æqualis erit, & arcus GZ circumferentiam BMCB adæquabit. Notum pariter est, Spiralem Conicam BSHD in planum extensam, Spiralis Archimedeæ portionem GVR evasuram. Consideretur jam Spiralis Conica BSHD, in qua sumpto quolibet puncto S, demittatur ad basim perpendicularis SO: idem ex omnibus ejus punctis factum intelligatur; manifestum erit Ichnographiam prædictæ lineæ fore integram Spiralem Archimedeam, ut liquet in triangulo DAC, in quo CD ad DS in eâdem ratione est, in qua semidiameter CA ad AO; idemque in quovis alio per axem triangulo dicendum erit, quare incrementa, & decrementa ipsius AO erunt in ratione temporum, &c.*

2. *Hoc posito, (per Coroll. 2. Appendic. tuæ Vivian. Probl.) erit, ut DB ad semidiametrum BA, idest, ut tota superficies Conica BCD, vel extensa RGZ, ad circulum BMC, ita spatium superficiei Conicæ BSHDB, idest Spirale segmentum GVR, ad spatium, integrâ Archimedis Spirali contentum, BOAB, & permutando, erit sector RGZ ad segmentum GVR, ut circulus BMC ad integrum Spirale spatium BOAB; propptereaque sector RGZ triplus erit segmenti Spiralis GVR; id quod verissimum est, per prop. 21. lib. 4. Pappi. Unde hâc Geometricâ confirmatione doctrinæ tuæ novum robur accedit.*

3. *Ponamus jam, lineam GVR esse circuli semicircumferentiam, sectorem verò RGZ circularem quadrantem, qui duplus erit semicirculi RVG. Convolvatur prædictus sector, ita ut in superficiem Conicam abeat DBC, & peripheria BMCB æqualis sit arcui quadrantis GZ; manifestum est, quòd semiperipheria GVR circa conum convolvetur, veluti BSHD, & in D terminabit; notum pariter est, Ichnographiam ejusdem lineæ fore Spiralem, ab Archimedea specie distinctam, quæ*

(ex

(ex Coroll citat) ſpatium comprehendet, quod ad circulum ſit, ut 1. *ad* 2. *Quoniam verò loco ſemicirculi G V R ſubſtitui poteſt quælibet portio, parabolica, hyperbolica, &c. habebimus in earumdem Ichnographiis infinitas Spirales lineas, genere longè diverſas, &c. Quæ quidem omnia tibi ſat nota conjicio, ex ejuſdem Propoſ. Coroll.* 6., *nec difficilis tibi erit modus ejuſmodi Ichnographias omnes determinandi, quarum tamen conſtructiones, ſi quæ ex omnibus magis ſimplices, & expeditæ videantur, utì & generalem methodum ad ipſarum tangentes ducendas, ſi communicaveris, rem oppidò gratam, & acceptiſſimam facturum te ſcias, &c.*

4. Quid igitur mihi, & olim hoc argumentum, & nunc maximè, tuis excitantibus litteris, rurſus ſpeculanti in mentem venerit, candidè aperiam; ut verò etiam geometricâ ſupellectile non ultra mediocritatem inſtructis, in quorum manus Epiſtola hæc mea incidere aliquando poterit, manifeſta eſſe poſſint quæcumque hìc inſerere placuerit, ea ipſa etiam demonſtrabo, quæ apud te demonſtratione non indigent, quale eſt illud, quod tanquam notiſſimum, & vulgò obvium videris ipſe ſupponere (à quo & initium auſpicabor) nempe quomodo Coni recti ſuperficies intelligi poſſit in planum evolvi, & explicari, aut contra, plana quælibet ſuperficies in Coni cucullum detorqueri. Eſto Coni recti ſuperficies (integra, an dimidia, aut duobus per axem planis intercepta, perinde eſt) DGC in planum explicanda. Centro D, intervallo DC lateris coni, deſcribatur plani circuli portio DCH; ſitque, ut DC ad CA radium baſis coni, ita reciprocè angulus GAC inclinationis planorum, ſuperficiem conicam, quæ explicanda occurrit, intercipientium (vel ita 4. anguli recti in ſuperficie integra, ſeu duo tantùm in dimidia) ad angulum CDH: Dico ſectorem CDH eſſe ipſammet ſuperficiem conicam DGC in planum evolutam; quia

TAB. XIV. Fig. 3.

quia enim arcus eidem angulo subtensi sunt, ut radii, & qui ab eodem radio describuntur, sunt, ut anguli, ideo duorum quorumlibet arcuum proportio erit ex rationibus radiorum, & angulorum composita, quæ si reciprocæ fuerint, ut in casu nostro, rationem dabunt æqualitatis; æqualis est igitur arcus CH ipsi CG; ductis verò ex eodem puncto S radii, seu lateris DC, arcu SI ipsi CH concentrico, & SF in coni superficie, ubi per planum basi parallelum FES secatur, constat, arcum GC ad FS in ea ratione esse, in qua radius AC ad ES (ob communem angulum inclinationis planorum, quibus uterque intercipitur) scilicet, ut CD ad DS, vel, ut arcus CH ad SI; sunt autem antecedentes, nempe arcus GC, CH æquales; ergo & consequentes FS, SI æquales erunt; atque ita semper: cùm igitur omnes arcus sectoris CDH æquales sint omnibus, & singulis arcubus superficiei conicæ DCG, illos comparando, qui per idem lateris coni punctum transeunt, iisdem applicati omninò congruent; quare si sector complicari circa conum intelligatur, arcus CH congruet arcui CG; & puncto H in G posito, non poterit non congruere radius DH lateri æquali DG, unde punctum I superponetur ipsi F, & arcus SI congruet eidem SF sibi æquali, totusque sector toti superficiei conicæ respondebit, & circa ipsam convolvetur, sive in ipsam abibit; unde viceversa, conica superficies DGC evoluta, in eumdem sectorem CDH explicabitur.

5. Quòd si linea, conicam superficiem terminans, fuerit, non alterum coni latus, sed curva quælibet GMD, non admodum diversa constructione intentum obtinebimus, quippe invento, ut priùs, arcu sectoris CH æquali extremo arcui CG datæ superficiei conicæ, ad quodlibet lateris coni punctum S ducto arcu SM in plano basi parallelo, ponatur arcus SV ipsi CH concen-

centricus in eodem plano, æqualis autem arcui SM, facto scilicet angulo SDV in eadem ratione ad MES, in qua radius SE ad SD (quæ ratio eadem ubique est, nimirum radii basis AC ad latus coni DC) atque ita porro fiat, quousque compleatur figura DVH, quæ apta nata erit datæ conicæ superficiei DMG congruere, eodemque argumento probabitur esse ejusdem in planum evolutæ figura.

6. Hinc colligitur (descriptâ curvæ GMD Ichnographiâ GKA, extensoque latere DML, juncto radio AL, radio DVO, & arcu KN) fore semper angulum GAC ad CDH, ut MES, aut KAN ad SDV, & permutando, GAC ad KAN, seu LAC, ut CDH ad SDV, vel CDO, aut arcum GC ad CL, ut HC ad CO; unde evoluta conicæ superficiei sic etiam haberi posset, nimirum, invento priùs sectore CDH, congruente conicæ superficiei CDG, tum arcubus GC, CH similiter divisis in L, & O, junctisque radiis AL, DO, ita hunc secando in V, ut ille ab Ichnographia secatur in K, quousque per puncta DVH transeat linea, determinans superficiem quæsitam DVHC, est quippe, ut LA ad AK, CA ad AN, seu CD ad DS, OD ad DV, existentibus arcubus HC, CO ipsis GC, CL proportionalibus, ut ostendimus ex puncto curvæ V per superiorem modum quæsito.

7. Unde è contrario data figura DVHC circa conum DCB complicanda, ut evadat DMGC, facilè habebimus ejus Ichnographiam, facto priùs angulo GAC ad datum CDH sectoris, datæ figuræ adscripti, ut CD ad CA, sectisque similiter in L, & O arcubus GC, CH, nec non radio AL in K, ut OD dividitur à datæ figuræ perimetro in V: tunc enim punctum K erit in figuræ GKAC, Ichnographiam quæsitam determinantis, perimetro. Quæ autem de superficie conicâ GMDC, seu de ejus evolutâ CDVH, respectu Ichnographiæ

AKGC dicta sunt, eadem, ut constat, valent de residuâ coni superficie GMD, ejusve evolutâ DVH, respectu ejus Ichnographiæ GKA, quas propterea ex præmissis modis alterutro facilè determinabis, qualescumque fuerint curvæ propositæ; & si linea VH, vel *u* H recta fuerit, constructionem habebis, ducendi in conicâ superficie lineam GM, seu G*m*, omnium data puncta G, M (non in eodem latere, nec in plano basi parallelo posita) conjungentium *Brevissimam*, ejusque Ichnographiam describendi.

TAB. XV. Fig. 4. 5. Quomodo utcumque satisfactum puto quæstioni, quam moves, determinandi scilicet Ichnographiam figuræ tuæ GVR circa conum DCB convolutæ, sive illa sit semicirculus, sive parabola, sive hyperbola, aut alterius cujuslibet generis curva extiterit, unde dabuntur infinitæ illæ Spiralium species in his Ichnographiis, quas mente jam comprehendisti. Verùm nescio an operæ pretium sit elegantiorem, quam mox subdo, constructionem illarum attendere.

TAB. XIV. Fig. 6. 8. Esto figura quælibet in Conum convolvenda, aut ex ipso in planum explicata CVD, & sector illi circumscriptus (inscriptusve si cava fuerit) DGC; oportet determinare lineam, quæ ejus convolutæ Ichnographiam clauderet in basi coni dati radii DA, qui minor sit radio sectoris DC. Fiat super DA figura AOD similis, & similiter posita ipsi datæ CVD (secto nimirum quovis ramo DV in O proportionaliter, ac secatur CD in A, & per puncta AOD ductâ lineâ) & centro D ducto quovis arcu NOH, fiat semper HN ad NO in constanti ratione lateris coni CD ad radium basis DA; ajo, puncta H ad Ichnographiam AHD, propositæ curvæ CVD respondentem, pertinere; erit enim angulus LDA ad RDC, ut radius CD ad DA, unde arcus CR æqualis erit arcui AL; quando igitur sector CGD, cum inscripta figura CVD, convolvetur circa conum basis

ADT,

ADT, arcu CG congruente ejusdem basis arcui sibi æquali AT, portio CR congruet ipsi AL, & latus DR, cum puncto V curvæ CVD, per quod transit, erit superimpendens radio DL, in quo propterea erit punctum Ichnographicè subjectum puncto V dictæ curvæ; debet autem in eadem ratione distare punctum ichnographiæ à centro basis D, respectu radii DL, in quo reperitur, ac distet punctum V in latere coni DR à vertice D (ob similia triangula effecta à perpendiculo, ex punctis curvæ in superficie conica existentis ad basis Ichnographiam demisso, qua ratione in figura est CA ad AO, ut CD ad DS); itaque cùm sit, ut latus DC ad radium basis DA, seu DL, ita VD, distantia puncti V in superficie conica à vertice D, ad DO, seu DH, distantiam puncti H à centro basis, erit punctum H, & alia omnia simili modo determinata, ad curvam ichnographiæ, quæ quærebatur. TAB. XV. Fig. 4.

9. E converso, datâ ichnographiâ, lineam ipsi in cono respondentem in plano determinabimus; sit enim talis Ichnographia AHD, & radio DA extenso in C, ut DC æqualis fiat lateri coni propositi, super ipsa fiat figura CKD similis, ac similiter posita datæ AHD; & ducto ex centro D quolibet arcu SK, ita dividatur in V, ut sit KS ad SV, ut latus coni CD ad radium basis DA; erit punctum V in linea CVD quæsita, quæ in superficie conica impendet datæ ichnographiæ AHD; nam recalcatis præcedentis demonstrationis vestigiis, ostendentur arcus CR, LA æquales, unde applicati congruent, & punctum V superimpendebit ipsi H, quippe tantumdem in latere DR proportionaliter à vertice distans, quantùm H in radio à centro D; Vnde facillima habetur constructio, nedum Ichnographiæ in tua figura, ubi GVR convolvenda supponatur semicirculus (alio enim semicirculo super radio basis facto, & in arcus concentricos basi resoluta, oportet singulorum ar- TAB. XV. Fig. 5.

 cuum

cuum dicto semicirculo comprehensorum quadruplos determinare, & per eorum extrema curvam ducere; erit enim coni latus radii basis quadruplum, uti quatuor anguli recti quadrupli sunt unius subtensi à quadrante GRZ), sed & ubi supponatur parabola, aut hyperbola (factâ nimirum simili constructione, & ex concentricis peripheriis tali parte determinatâ, quæ ad arcum, radio, & simili parabolâ, aut hyperbolâ super ipsum descriptâ conclusum, sit semper in data ratione lateris coni ad radium basis); At è contra si cupias Ichnographiam circularem, parabolicam, alteriusve figuræ habere, manifesta erit constructio figuræ, quæ cono advoluta ejusmodi Ichnographiam dare nata esset, per sectionem arcuum concentricorum, peripheria similis figuræ super latere coni descriptæ, ipsoque coni latere comprehensorum, in eadem ratione data, lateris coni ad radium basis. En quanta curvarum seges, quas geometricè determinare possumus, quotiescumque data ratio, lateris coni ad radium basis, potest geometricè angulis applicari, vel per multiplicationem, vel per divisionem arcuum propositorum.

TAB. XIV. Fig. 3. 10. Hinc in meo Sphærocylindricarum, & Conocylindricarum sectionum Tractatu ostendi, quòd, si conus BDC secari intelligatur semicylindro, cujus basis semicirculus GKA super radio basis AG descriptus, sitque latus coni duplum verbi causa radii basis, seu in quavis alia ad ipsum ratione, facto super DH, æquali lateri coni, semicirculo pariter DVH, omnibusque arcubus VI, centro D descriptis, bifariam, seu in data ratione sectis ad puncta *u*, ita ut sit VI ad *u*I, ut DC ad CA, linea D*u*H, per puncta *u* sic inventa transiens, erit æqualis cono cylindricæ sectioni; id quod etiam succedet, si loco semicirculorum GKA, HVD, ponantur quævis aliæ similes figuræ, semper enim communis conicæ, & cy-

cylindricæ superficiei sectio in lineam planam illi æqualem commutabitur; cùmque in Vivianeis, *pag.* 122. paulò ante *num.* 37., ostenderim, lineam quoque Sphæro-cylindricam, seu perimetrum Veli Florentini, esse communem conicæ, & cylindricæ superficiei sectionem, quam etiam *num.* 41. *p.* 136. ostendi, æqualem perimetro cujusdam ellipsis, ideo etiam curva D*u*H, modo præscripto efformata, cuidam ellipsis circumferentiæ æqualis ostendetur. Vides autem, opinor, quàm utile sit eamdem lineam ex variis superficiebus in alias transferre, diversisque constructionibus in plano determinare, prout eadem linea elliptica, tum modo superiùs descripto, tum per modum ungulæ ex cylindro expansæ, tum vulgari modo, prout Apollonianam coni sectionem terminat, aliisque modis in plano jacere potest, semperque diversas tangentium determinationes suscipit, pro vario suarum partium situ; contingere siquidem potest, ut in uno rectificationem respuens, in altero illam admittat, vel saltem cum alia nota linea comparationem suscipiat. Sic, si proponatur linea LOO, cujus hæc proprietas, ut ducto radio FO ex determinato puncto F, secante arcum LG, ejusque tangentem LE in punctis G, E, sit semper post FG radium, & secantem FE, tertia proportionalis FO, facilè erit curvam LOO cum linea Geometris jam satis notâ comparare, videlicet cum parabola notæ parametri; siquidem illa ipsa non alia est, quàm parabola evoluta ex superficie coni, cujus triangulum per axem sit æquilaterum; id quod extra hanc methodum, nescio an satis promptum esset conjecturâ assequi, nedum facili geometricâ constructione determinare. TAB. XV. Fig. 1.

11. Jam, quando ita provocas, operæ pretium est, ut curvarum, eo, quem præmisi, modo descriptarum, tangentes universali methodo determinare aggrediar, pro quo: assumatur quælibet figura ALLB, ductisque TAB. XIV. Fig. 4.

que ex centro A quibusvis concentricis arcubus EL, EL, similiter augeantur producti in M, aut minuantur divisi in I, quousque per puncta AMMB transeat curva, qualem *num.* 8. determinavimus, aut per puncta AIIB transeat curva, qualem *num.* 9. descripsimus; quæraturque ad datum punctum M, vel I curvarum ejusmodi tangens. Ducto arcu quolibet, verbi gratia extremo BCD, occurrente junctæ chordæ, seu radio AM, AI in D, H, ductoque arcu ML, seu IL, & junctâ chordâ AL, secante priorem arcum in C, ducantur tangentes arcus DB ad puncta D, H, C, quæ sint DG, HF, CK; huic ultimæ occurrat in K tangens LK ducta ex puncto L datæ figuræ ALB; in ea autem ratione, in qua sunt arcus LE ad EM, aut EI, ponatur esse data portio tangentis CK ad DG, vel HF. Dico, junctam GM, aut FI esse tangentem ejusmodi curvarum in M, I. Si enim hæ curvæ gigni intelligantur ex æquabili motu lineæ AB circa A circulariter conversæ, & motu accelerato, vel retardato, prout opus fuerit, puncti B per BA ascendentis, aut A per AB descendentis, (ad modum, quo Spirales generari solent) manifestum est, æquabilem illam velocitatem motus circularis in curva BMA tantò majorem, & in BIA tantò minorem fore, quàm sit in curva BLA, quantò major est arcus ME, & minor EI, quàm EL, id est ex constructione, quantò major est GD, & minor HF, quàm CK, eodem existente impetu puncti difformiter fluentis, sive in M, sive I, sive in L, propter æqualitatem ipsarum AM, AI, AL, vel residuarum DM, HI, CL, quas mobile punctum A, vel B interea peregit, dum linea circulariter mota respectivè arcum DB, HB, vel CB emensa est. Si igitur velocitas difformis in puncto L curvæ BLA exprimatur per LC, etiam eadem velocitas in punctis M, I aliarum curvarum exprimetur per MD, IH illi æquales, & si velocitas

æqua-

æquabilis circularis motus exprimatur per CK ad curvam ALB (exprimenda verò est prorsus per ipsam, quoniam in ea est motus circularis directio, quippe tangens arcus CB, & aliunde intercipitur à tangente LK, angulo recto KCL opposita, in qua utriusque motus composita directio reperiri debet, ex 8. Prop. l. 2. Geometriæ motus Joannis Cevæ, qui non cognatione tantùm, sed & geometrico acumine, & inveniendi fœlicitate Tibi verè Germanus existit) similis æquabilis velocitas ad curvam AMB exprimetur per DG, & ad curvam AIB per HF; propterea juncta GM, & FI tangens erit, sive ex eadem propositione, sive ex his, quæ *cap.* 5. *num.* 3. demonstravi in Hugenianis, & antequàm Fratris tui Geometriam legerem, ex Torricellii loco ibidem citato deduxeram. Atque hinc est, quòd si ordinatæ ad axem non sint arcus concentrici, sed rectæ lineæ, velut LE, FE in eadem semper ratione, ductis LC, FQ axi parallelis, datâque figuræ BL tangente L*r*, occurrente basi in *r*; sumpta Q*t*, quæ sit ad C*r* in eadem ordinatarum ratione, juncta *t*F tanget curvam FB; tum enim illæ ordinatæ LE, FE, quemadmodum & basis recta CQ*e*, habendæ sunt pro arcubus concentricis, à centro infinitè distante descriptis, cujus radii propterea sint ipsæ axi parallelæ LC, QF, ipsæque *r*C, *t*Q pro tangentibus extremi circuli CQ*e*, ob infinitam ejus radii magnitudinem, in unam eamdemque rectam cum suis tangentibus abeuntis; cujus constructionis veritas jam aliunde innotuit, siquidem *r*L, *t*F hoc modo designatæ in unum & idem axis BE punctum collimabunt, utì ex proprietate triangulorum constat. TAB. XIV. Fig. 5.

12. Quòd si quis malit, independenter à motuum compositione easdem tangentes evidentiori methodo inquirere, per me licet. Esto enim primùm duplex figura, altera ex rectis LE, *le* ad axem ordinatis, ali-

altera ex arcubus EM, *em* ad eumdem axem applicatis, & respectivè æqualibus ipsis LE, *le* sibi correspondentibus; datâ tangente LK prioris figuræ, occurrente ipsi BK, ex vertice ductæ æquidistanter ad ordinatas, in puncto K, tangens figuræ posterioris ad punctum M sic determinabitur; juncto radio BM, atque huic ex B perpendiculari BG, æquali ipsi BK, jungatur GM: dico hanc esse tangentem; occurrat enim in S cuilibet alteri ex arcubus concentricis *em*, secanti radium in O; sitque OP radio BM ex O perpendicularis, ac juncta chorda BL, ordinetur per idem axis punctum *e*, applicata prioris curvæ *e*T, secans tangentem in R, chordam in N; erit utique arcus *e*O æqualis *e*N, eò quòd sector sit triangulo analogus; sed & *em* æqualis *el*; itaque & O*m* æqualis N*l*; ipsa verò NR æqualis OP, quia ad BK, æqualem ipsi BG, est in eadem ratione, LN ad LB, seu E*e* ad EB, aut OM ad MB; quæ omnia valent etiam de homologis lineis per minusculas litteras designatis, & infra punctum E ductis; hoc solo discrimine, quòd si *e* sit supra E, erit NR major, quàm N*l*; unde & OP major, quàm O*m*; multò igitur magis arcus OS (qui est major ipsa OP, à fortiori quàm major sit suo sinu) erit major, quàm O*m*; unde punctum S erit extra curvam; si verò *e* acceptum fuerit infra E, erit *nr* minor, quàm *nl*; unde & *op* minor, quàm *om*; arcus autem *so* minor est tangente *op*, à fortiori, quàm sua tangente minor sit arcus, quem ex centro B, juncta B*p* interciperet: multò ergo minor est arcu *om*; & ideo etiam punctum *s* extra curvam erit; recta igitur GM tangit. Jam verò concipiatur alia curva BF priori analoga, ita ut ejus ordinatæ FE ad ordinatas prioris LE perpetuò sint in eadem ratione, utique facta DB ad BK, ut FE ad EL, juncta DF hanc curvam tanget; siquidem si occurrat alteri ordinatæ in puncto T, erit etiam T*e* ad *e*R, ut FE ad EL, nempe ut *fe* ad *el*;

qua-

quare cùm eR major sit ipsâ el, etiam eT major erit, quàm ef; si igitur intelligatur figura Bil ex arcubus EI æqualibus ordinatis hujus postremæ figuræ EF, juncto radio BI, atque huic perpendiculari BH, æquali ipsi BD, juncta HI tanget; eritque HB ad BG, ut IE ad ME. Duarum igitur figurarum, ex concentricis arcubus in eadem constanti ratione positis descriptarum, tangentes intercipiunt rectas ad radium perpendiculariter ductas, ipsis arcubus proportionales: Quod coincidit cum præmissa constructione.

13. Antequam autem hinc aliò digrediar, adnotare juvabit, ex harum pariter curvarum descriptione, doctrinam illam meam secundæ Appendicis ad Vivianea Problemata iterum demonstrari, seu denuò confirmari posse. Hinc siquidem deducitur, Ichnographiam cujusvis portionis ex conica superficie absumptæ, qualis esset AHD, esse mediam proportionalem inter ipsam figuram conicæ superficiei in planum expansam, veluti DVC, & aliam ipsi similem, similiterque positam DOA, super radio basis coni descriptam; nam propter singulos arcus HN, se habentes ad NO in constanti ratione lateris coni CD ad radium basis AD, erit tota figura AHD ad AOD, ut CD ad DA; sed CVD ad AOD sibi similem est, ut quadratum CD ad quadratum DA; itaque CVD ad AOD est in duplicatâ ratione AHD ad AOD, propterea & conica superficies CVD ad Ichnographiam suam AHD est, ut AHD ad AOD, sive, ut latus coni CD ad radium basis DA. Quod &c. TAB. XIV. Fig. 6.

14. Tu verò non hìc subsistis, & alias rursus novarum speculationum fodinas eruere aggressus, Epistolis Tuis, pridie kal. Julii ad me datis, novâ iterum ratione lineas in conica superficie descriptas in planum sternere niteris. Ais enim:

Speculationem instituere placuit circa Spiralem illam conicam, de qua superioris hebdomadæ Tabellario ad Te

ſcriptas Epiſtolas tradidi, cujus Ichnographia integra eſt Spiralis Archimedea; conſiderabam ſcilicet cylindricam ſuperficiem, quam illæ perpendiculares efformant, quibus ſuffulta, ut ita dicam, diſtenditur prædicta Spiralis conica; ſcire autem optabam, in quam lineam evaderet, explicatâ in rectam lineam Spirali Archimedeâ, unà cum ipſa ſuperficie cylindrica, ad conicam ſpiralem lineam terminante. Si enim hæc curvam aliquam è lineis aliàs notis referret, verbi gratia parabolam, id egregiarum certè Speculationum fodinam aperiret, &c.

15. Id ego primo ſtatim intuitu ad hyperbolæ quadraturam pertinere opinatus ſum, nec me fefellit opinio, ſiquidem ad illam referri jam tum videbatur parabolicæ curvæ rectificatio, utì ex Hugenianis *cap.* 12. *num.* 14. conſtat; parabolæ autem rectificationem cum Spiralis Archimedeæ diſtenſione conjunctam eſſe, tum ab aliis animadverteram oſtenſum eſſe, tum ipſe poſtmodum docuiſtì ab Joanne Ceva fratre tuo, Geometr. mot. l. 2. prop. 14., idem demonſtrari. Antea verò id mihi innotuerat hoc ratiocinio. Eſto Spiralis Archimedea C *a* A
TAB. XV. Fig. 3. 6. primæ circulationis, & poſito in altera figura Parabolæ Apollonianæ axe CN æquali dimidio circumferentiæ ADA, ordinata autem NA æquali radio CA, deſcribatur parabola C *a* A. Dico hanc Spirali æqualem eſſe; ſumpto enim quolibet in parabola puncto *a*, & ordinata *an*; & in ſpirali puncto *a*, cujus radius *ac* ſit æqualis ordinatæ *an*, ducatur arcus *a*I; ducanturque tam in parabola, quàm in ſpirali tangentes *ab*, occurrentes ipſi C*b* (perpendiculari hinc ad radium C*a*, illinc ad ordinatam *an*) in punctis *b*, *b*. Jam, cùm ſit C*b* in ſpirali æqualis arcui *a*I, (ut docuimus in Hugenianis *cap.* 5. *num.* 9.) ſit autem peripheria ADA ad arcum I*a* in duplicata ratione AC ad C*a*, ſeu (in parabola) AN ad *na*, videlicet, ut NC ad C*n*; ſitque CN æqualis ſemiſſi peripheriæ ADA, erit & C*n* æqualis ſemiſſi arcu-

cus *aI*, vel subtangentis C*b* spiralis; sed & subtangentis *nb* parabolæ subdupla est eadem C*n*; æquales igitur sunt, tum in spirali, tum in parabola subtangentes *nb*, C*b*; æquales autem & ordinata *an*, & radius C*a*; tota igitur tangens parabolæ *ab*, quæ his potentia æquatur, æqualis erit tangenti *ab* spiralis sibi correspondenti; sumptaque infinitè exigua utrobique tangentis particula *ad*, ac dimissa in ordinatam, & radium subtangentis parallela *dm*, erunt triangula *dma*, *dma* utrobique similiter æqualia, applicatisque alterius ad alteram homologis triangulorum *amd* lateribus, tangentes *ad*, seu curvarum partes his respondentes congruent, certè eò res deducetur, ut alterius ad alteram proportio sit propior æqualitati, quàm quælibet data majoris, aut minoris inæqualitatis ratio; æquales igitur sunt, tum Archimedea Spiralis, tum parabola quadratica nuper designata.

16. Hinc patet, quàm justò minorem Spiralem fecerint, qui semicircumferentiæ ADA æqualem esse asseruerunt, uti Sturmius, Math. Enucl. l. 2. cap. 4. consect. 2. proposit. 17. Guarinus, tract. 18. Eucl. Adaucti prop. 13. Rinaldinus, de resol. & compos. pag. 299. aliique; videlicet tantò minorem, quantò axis NC parabolæ C*a*A minor est ipsa curva C*a*A; constat item à scopo non leviter aberrasse Virum Clarissimum Borellium, ubi de motu animal. p. 2. prop. 41. duas ejusdem Spiralis revolutiones comparans, ait illas ad invicem esse, ut peripheriæ mediæ arithmeticæ inter extremas cujuslibet Spiralis, sive esse ad invicem, ut sunt circulares zonæ, quibus inscribuntur; hoc enim perinde est, ac si diceret, curvam parabolicam *tz* esse ad *tz* (lineis æquali intervallo distantibus, axi parallelis intercepta) ductâ rectâ FO secante præfatas parallelas in *q*, Q, ut trapezium Q*s*HO ad OH*sq*, quod est absurdum; Sumptis quippe hyperbolicis spatiis O*os*H, TAB. XIV. Fig. 8.

 OH*so*

OH*so* (iisdem curvæ portionibus correspondentibus per *cap.* 12. *num.* 14. Hugenianorum) & permutando, esset Q*s*HO ad inscriptum O*os*H, ut OH*sq* ad circumscriptum OH*so*, ideft ratio majoris inæqualitatis æqualis foret rationi inæqualitatis minoris.

Cæterùm eo modo, quo parabolam quadraticam, atque Archimedeam Spiralem comparavi, similiter alias spiralium species cum aliis parabolarum speciebus posse conferri manifestum est, utì aliàs, si satìs memini, indicabam; nempe si radiorum cujuscumque helicis potestates denominatæ ab exponente x sint inter se, ut angulorum, seu arcuum à radiis interceptorum potestates denominatæ ab exponente y, facta parabola talis naturæ, ut abscissarum quarumvis potestates denominatæ ab exponente y sint, ut potestates suarum ordinatarum denominatæ ab aggregato exponentium $y+x$, spirali propositæ, ita respondebit, ut, si ultima ejus ordinatarum æquetur radio dictæ spiralis, axis autem sit $\frac{x}{y+x}$ totius circumferentiæ, illa Curva Parabolica, & ejusmodi Spiralis æquales erunt, ut ex methodo tangentium, tam parabolarum, quàm spiralium, *cap.* 5. *num.* 4. & 8. Hugenianorum, traditâ facilè constat.

17. Sed curvarum dimensionem tractantes quid vetat aliò paulatim digredi, quousque modum Cycloidem rectificandi tibi communicem, quem tibi acceptissimum fore video, quippe his geometricis venustatibus delectaris? En illum: esto Cyclois A*a*O, ordinatæ *ar*, *ar*, secantes semicirculum genitorem in *d*, *d*; extendantur chordæ A*d*, A*d* in *f*, *f* usque ad basim, applicenturque *rg*, *rg* his ipsis A*f*, A*f* æquales, ut oriatur hinc curva G*gg*, quæ erit Hyperbola secundi gradus, sive (ut Cl. Viviano aliquando appellare placut.) *Mesolabica*, propter *f*A ad A*d*, seu DA ad A*r*,

TAB. XIV. Fig. 9.

ut

ut quadratum A*f* ad quadratum AD, sive quadratum *rg* ad DG. Jam sic: ducta *ab* Cycloidis tangens quantumvis parva, & duabus prædictis ordinatis quantumvis proximis intercepta, erit utique parallela ipsi A*f*; (ex dictis in Hugenianis *cap.* 8. *num.* 7.) erit ergo *ab* ad intervallum ordinatarum *rr*, ut A*f*, seu *rg* ad diametrum AD; & hoc semper; rectangulum igitur *grr* æquale erit rectangulo ex AD in *ab*; & omnia rectangula *grr*, exhaurientia spatium infinitum *g*GDA*h*, æqualia rectangulo ex AD in curvam semi-cycloidis A*a*O, quam innumeræ tangentes *ab* perinde exhauriunt; ergo AD in A*a*O ad quadr. ejusdem AD, scilicet curva ipsa A*a*O ad diametrum AD, est ut spatium *g*GDA*h* ad inscriptum diametri quadratum GDAH; hæc autem est proportio dupla, ut ipse *cap.* 8. *numer.* 11. Hugenianorum generaliter docui, atque ipsemet frater tuus, supra laudatus, in Geometr. mot. l. 1. prop. 12. pridem ostendit; itaque curva semi-cycloidis A*a*O dupla erit diametri, & tota Cyclois ejusdem quadrupla, quin & partes singulæ A*a* duplæ chordarum sibi correspondentium *ad*, uti aliis Geometris per alias vias pridem innotuit, Hugenio præsertim, ex præclara Evolutarum Curvarum inventione. Est verò generalis hæc methodus, si rem propiùs aspicias, atque ad omnes prorsus illas curvas exporrigitur, quas, *cap.* 8. *num.* 5. Hugenianorum, *Correlatas* voco, ex quibus scilicet, per simplicissimam Euclidis elem. l. 1. proposit. 43. innumerarum figurarum dimensionem derivavi.

18. Duo hìc interea adnotare non pigeat. Alterum, quòd si cylindricus erectus super semi-cycloide O*a*AD secari intelligatur plano quomodolibet inclinato, transeunte per basim OD, semper abscissa superficies ungularis in planum explicata in parabolam notam abibit; siquidem chordæ circuli A*d*, ad respectiva puncta *r* diametri AD applicatæ, parabolam efficiunt; ergo & ea- TAB. XIV. Fig. 10.

earum duplæ, nempe portiones curvæ cycloidalis *a* A, ad eadem diametri puncta, vel ad proportionales partes altitudinis illius ungulæ, applicatæ, parabolam item conficient; sed omnis superficies ungularis conflatur ex similibus curvæ portionibus applicatis ad partes altitudinis, proportionales partibus diametri basis, uti constat ex hac figura, ubi AQSEIMGO sit cylindricus super quavis curvâ IOGM, sectus plano AZMI, per basim MI transeunte, manifestum est, superficiem ungularem AZMGO conflari ex portionibus curvæ BZ (æqualibus abscissis à vertice OG) applicatis ad puncta B dividentia altitudinem ungulæ AO in eadem ratione, in qua axis curvæ OI secatur in F per applicatam GF: Unde si fingamus OGM esse Cycloidem, cujus portiones OG duplæ sunt chordarum semicirculi sibi respondentis, ideſt quarum quadrata sunt, ut axis abscissæ OF, manifestum erit, Ungulam Cycloidalem AZMO esse parabolam, quia quadratum curvæ OGM erit ad quadratum curvæ BZ æqualis ipsi OG, ut OI ad OF, seu BN, ideſt, ut altitudo OA ad AB, ac perimeter AZM erit æqualis curvæ parabolicæ, immò in parabolam etiam positione talem abibit, rectificatis curvis OM, BZ per explicationem ungulæ in planam superficiem, &c, è contra, reliqua superficies AZMS in trilineum parabolicum extendetur; quo statim constat (ob proportionalitatem Ungularum, tum superficialium, tum solidarum, cum superficiebus, aut molibus rotundorum corporum ab eadem figura) superficiem rotundam ex Cycloide circa basim, duplam esse rotundæ superficiei ab eadem circa tangentem verticis conversâ; necnon distantiam centri gravitatis curvæ cycloidalis à basi duplam esse distantiæ ejusdem à vertice, &c. facilèque hinc habetur dimensio utriusque ex illis rotundis superficiebus, ob notam curvæ longitudinem, & centri gravitatis distantiam, juxta regulam celeberrimam Guldini Vestri circa genesim rotundorum.

TAB. XV. Fig. 1.

19. Al-

19. Alterum, quod notari attentiùs velim, inde nullo negotio consequitur, nempe, datâ qualibet planâ superficie, quæ à curva qualibet linea definiatur, posse nos ejusmodi superficiem ita curvare, seu tali cylindrico circumvolvere, ut eadem curva linea nihilominus in uno plano jaceat, (quemadmodum in casu prædicto, curva parabolica AZM ita advolvitur cylindro cycloidali, ut nihilominus in uno, eodemque plano AIM, cylindrum secante, jaceat) seu cylindrum invenire, ex cujus sectione, eadem curva in superficiem ungularem convoluta efformetur. Propositum siquidem obtinebimus, alteram superficiem IOGM ita efformando, ut, quæ fuerat in data figura relatio ordinatarum ad axem, eadem sit curvæ portionum OM, OG pariter ad axem suum (ut in exemplo nostro, quæ est in cycloide portionum curvæ à vertice abscissarum ad axis sui partes ordinatis abscissas) enimverò super ejusmodi curva sic inventa erecto cylindrico, *ipsi advolvetur data figura*, & *suæ perimetri* partes in eodem plano, ad datæ figuræ altitudinem ipsummet cylindrum transversim secante, dispositas habebit, semper autem tangens figuræ quæsitæ OGM ad punctum G, intercepta eodem puncto, & ordinata per verticem O, erit = subtangenti datæ figuræ AZM, idest interceptæ inter punctum Q, & occursum tangentis puncti Z, (explicato parallelogrammo ASMO cum sua curva AZM) ut in exemplo cycloidis, ejus tangens subdupla est curvæ OG, quemadmodum ipsius AQ subdupla foret subtangens parabolæ explicatæ; id quod aliàs generaliter monuimus (*cap.* 5. *num.* 2.) & facillimè demonstratur ex dictis *cap.* 13. *num.* 5.

Exemplum aliud se se obvium præbet in ipsa Logistica, seu Logarithmica, quam si velis ex aliquo cylindro secare, aut cylindrum invenire, cui advolvatur, ita ut curva nihilominus in uno plano jaceat, id elegantissimè

tissimè obtinebis per cylindrum super Tractoria erectum, quandoquidem relatio ordinatarum Logisticæ ad axem mutatur in relationem earumdem ad curvam in
TAB. XV. Fig. 2. Tractoria, utì ostendimus *cap.* 5. *cit. num.* 2. Concipiatur, verbi gratiâ, in plano horizontali DFB erecta ad punctum B hasta quædam solidiori basi marmoreæ B infixa; mox alligata basi catenula aliqua FB, longitudine æquali parametro, seu subtangenti datæ Logisticæ, ejus extremum F trahatur per rectam FD; utique basis catenulam sequens describet Tractoriam curvam BNM, & hasta basi infixa curvam quamdam superficiem cylindricam super ipsa Tractoria erectam; hæc igitur secari intelligatur plano aliquo per axem Tractoriæ FD transeunte, ad altitudinem extremæ ordinatæ in Logistica proposita, dico, superficiem ungularem inde abscissam fore nil aliud, quàm ipsammet Logisticam tali cylindro advolutam; quippe si plani inclinatio fuerit per 45. gradus, itaut Logisticæ ordinata æquetur subtangenti ejusdem, seu erecta in ungula illa cylindrica ad punctum B adæquet catenulam BF, constat, omnes erectas ad puncta N, æquales fore ordinatis Tractoriæ NP, unde qualis est relatio ipsarum ad curvam BN, talis erit relatio applicatarum illius ungulæ ad suum axem, qui illi curvæ BN congruere intelligitur, & explicata illa superficie in planum BSS, utriusque ordinatis BF, & axe FD coincidentibus, erit quælibet axi Logisticæ parallela AS æqualis curvæ BN Tractoriæ, per dicta *cap.* 13. Hugenianorum *num.* 5. Possem & modum inserere, quo figura quælibet ita complicari in cylindrum posset, ut ejus curva ad conicam superficiem terminaret; sed ne longiùs digrediar,

TAB. XV. Fig. 46. 20. Jam ad institutum redeo; & cylindricam illam superficiem super spirali erectam, ac cono interclusam contemplor; utique perpendiculares OS super helicis punctis erectæ, & ad coni superficiem terminatæ, pro-

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.



proportionantur differentiis radiorum, eſt enim DA ad OS, ut CA, ſeu AB ad CO; itaque expoſitâ parabolâ C*a*A hanc ſpiralem BOA æquante, ſi ad ſingula puncta *a* peripheriæ parabolicæ erigi intelligantur æquales differentiis ordinatarum, (ubi angulus DCA, trianguli per axem coni ſemirectus fuerit); iiſve proportionales in ratione axis coni DA ad baſis radium AC, (ubi ille angulus major, aut minor fuerit ſemirecto); ſeu ſi cylindrica ſuperficies ſuper C*a*A perimetro parabolæ erecta ſecari intelligatur plano per AΦ tranſeunte, ac tantumdem baſi inclinato, ac latus coni radio baſis inclinetur, ſcilicet per angulum DCA, quomodo erectæ manebunt in ſuperficie cylindrica quæſitæ ordinatarum differentiis (adeòque & differentiis æqualium radiorum circuli AC) proportionales, quippe correſpondentes applicatis trilinei parabolici C*a*AΦ, erit ungula ex tali ſuperficie cylindrica, baſi, & plano ſecante, interjecta eadem prorſus, quæ ſuper ſpirali AOB priùs erigebatur, & cono concluſa manebat; Perimeter autem ungulæ cylindri parabolici eſt parabolæ æqualis, utì conſtare poteſt ex propoſ. 3. Append. noſtræ Vivian. Probl.; itaque explicatâ in rectam ſpirali BOA, curva BSHD, non quidem in parabolam, quæ talis poſitione ſit, ſed in ungulæ parabolicæ perimetrum abitura eſt, æqualem longitudine cuidam parabolæ, cujus rectum latus ſit ad latus rectum prioris C*a*A, ut lateris coni DC quadratum ad quadratum radii AC, axis longitudine ipſi CN æquali remanente; id quod etiam immediatiùs, & abſque tot ambagibus colligitur, ex quò ipſe demonſtraveris curvam BSHD eſſe ſpiralem conicam, quæ evoluta in Archimedeam ſpiralem abeat, per ſuperiùs dicta *num.* 15., utique ejuſmodi parabolæ æqualem.

21. Dimenſio autem ipſius ſuperficiei cylindricæ



DHSBOA habebitur, ex rectangulo axis AD in ipsam spiralem AOB, vel huic æqualem parabolam CaA, subtrahendo tale spatium, quod ad portionem ejusdem parabolæ, duabus ad axem ordinatis interceptam, quarum altera ex foco, altera tantò infra ipsum, quantus est totus axis, sit in ratione axis DA ad radium AC; residuum quippe erit spatium ungulæ supra determinatæ; id quod analyticè sic describi potest. Radius AC sit $= r$, & $\frac{1}{4}$ basis quadraticis inscribendæ quadranti circulari radii AC (vel semissis lateris recti parabolæ CaN, idest tertiæ proportionalis post semiperipheriam, & radium) sit $= c$; quæ verò utriusque potest quadratum (quæ scilicet foret parabolæ perpendicularis in A) esto $= u$; axis coni AD esto $= a$; superficies hyperbolæ æquilateræ interceptæ semitransverso æquali ipsi c, & ordinata ad rectæ diametri portionem æqualem ipsi r, esto hh. Erit cylindrica superficies spirali imminens, & cono conclusa ADHSBOA $= \frac{ahh}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$; nam linea spiralis, seu parabolica, utpote cum c continens rectangulum $= hh$, erit $\frac{hh}{c}$; tota igitur cylindrica superficies spirali imminens, & usque ad apicem coni completa, erit $\frac{ahh}{c}$. Verùm inde subtrahenda est Ungula superior, cujus spatium, ad portionem parabolæ interceptam ordinatis, c ex foco, & u tantò longiùs ab ipso, quanta est semissis circumferentiæ, seu axis datæ parabolæ, sit in ratione a ad r; cùm verò integræ portiones parabolæ, abscissæ à vertice per ordinatas u, & c sint, ut u^3 ad c^3; dividendo, portio truncata intercepta ordinatis, u, c, erit ad portionem interjectam vertici, & minori ordinatâ c, ut $u^3 - c^3$ ad c^3; estque portio interjecta vertici, & foci ordinata $c = \frac{1}{3} cc$; igitur truncata illa portio ordinatis c, & u intercepta erit $\frac{u^3}{3c} - \frac{cc}{3}$,

&



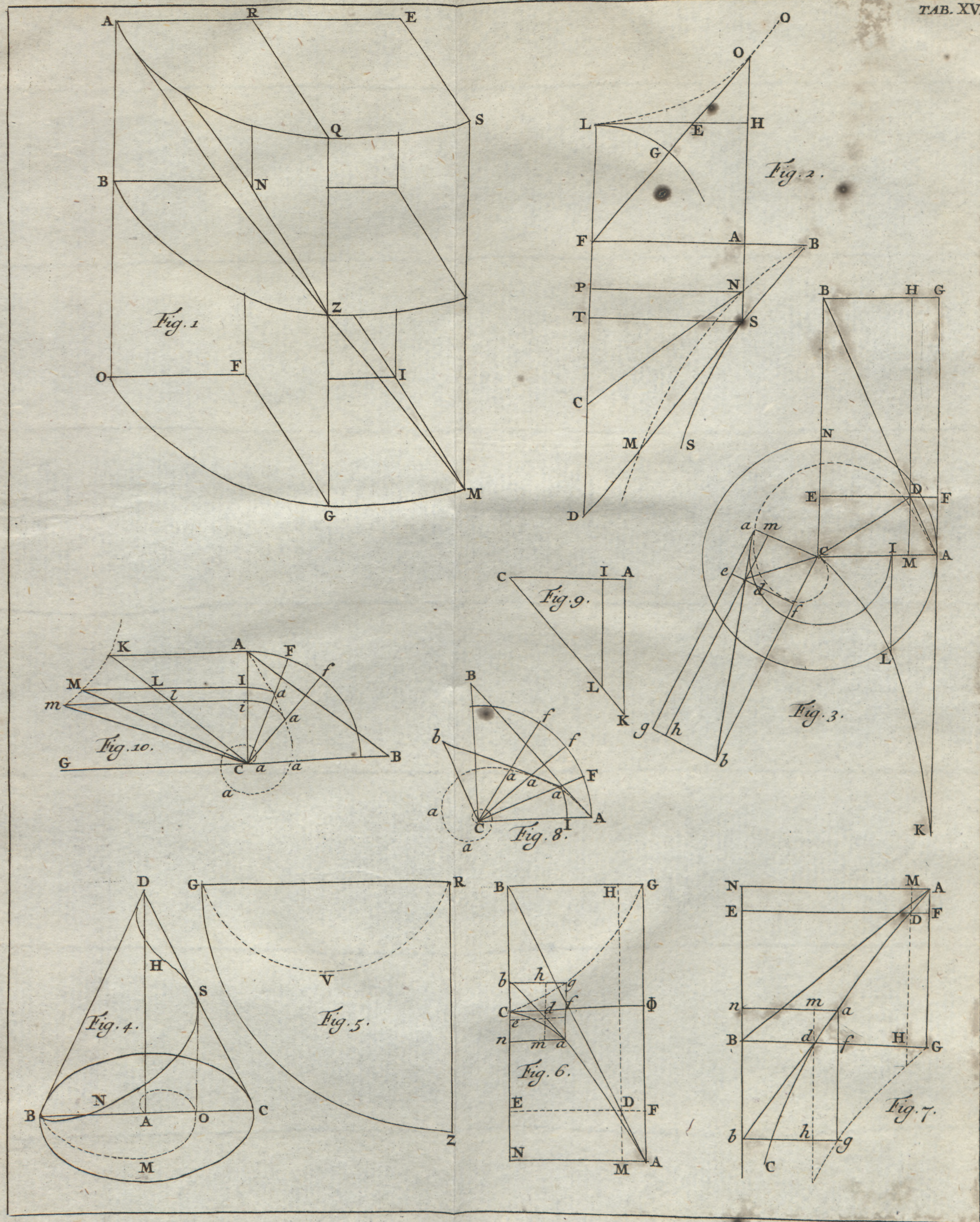
& quæ ad hanc eſt in ratione a ad r erit $\frac{au^3}{3rc} - \frac{acc}{3r}$; quâ ſubtractâ ex $\frac{abh}{c}$ fit $\frac{abh}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r} =$ cylindricæ illi portionis ſpiraceæ BSHDAOB cono incluſæ.

22. Nihil, ut arbitror, attinet contemplationem ulteriùs extendere, quum omnia ipſe mentis excurſu jam præoccupaveris; ſed ſi optaris ejuſmodi ſpiraceæ cylindricæ ſuperficiei portionem, quâ explicatâ in planum, rectificata perimetro BOA, etiam BSHD in rectam abeat, ſume ſpiralem Geometricam A*a*C; TAB. XV. Fig. 8. nam & in coni ſuperficie ſimilem ſpiralem habebis (utì eodem tuo ratiocinio conſtat), quæ potentia æqualis erit ipſi C*a*A, & axi coni ſuper illa perpendiculariter erecti, propter radios AC, *a*C proportionales curvæ portionibus C*a*A, C*aa* ab ipſo centro abſciſſis, ut colligitur ex dictis *cap.* 5. Hugenianorum *num.* 10., adeòque & differentias radiorum F*a*, *fa* curvæ portionibus A*a* reſpondentes.

Hæc habui, quæ raptim ad Te ſcriberem, Vir Clariſſ., & quæ Tuis elegantiſſimis ſpeculationibus reponerem; de controverſia autem Mechanica, quæ hactenus nos commiſit, erit aliàs diſſerendi locus, eſto enim utilior ſit Statica illa diſſertatio, jucundior tamen, minùſque in lubrico poſita, Geometricarum rerum ſedula meditatio. Vale, meque, ut facis, amare perge; quamquam non eſt cur de hoc ſim ſollicitus, inſitæ enim Humanitatis tuæ ſtimulos habes, quibus in id incitaris. Dabam Kal. Aug. &c.

FINIS.


POLITECHNIKA GDAŃSKA
BIBLIOTEKA
CENTRALNA


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10



INDEX
IN
TRACTATUM DE LUMINE.

CAPUT I.
De Radiis directis.

CAPUT II.
De Reflexione.

CAPUT III.
De Refractione.

CAPUT IV.

De Refractione aëris.

CAPUT V.

De miranda refractione crystalli Islandici.

CAPUT VI.

De figuris corporum Diaphanorum quæ ad refractionem reflexionemque conducunt.

Inven-

INDEX RERUM

In Tractatu de causâ Gravitatis contentarum.

ELENCHUS RERUM

Contentarum in Guidonis Grandi &c. Geometrica demonstratione Theorematum Hugenianorum circa Logisticam.

CAPUT I.

CAPUT II.

CAPUT III.

CAPUT IV.

CAPUT V.

Hyper-

CAPUT VIII.

CAPUT IX.

CAPUT X.

CAPUT XI.

Datum

CAPUT XII.

CAPUT XIII.

EPISTOLA GEOMETRICA G. Grandi ad P. T. Cevam. 293

Tomi primi Operum Posthumorum Index.

DIOPTRICA.

De refractione radiorum.

Tomi Secundi Operum Posthumorum Index.

DE CORONIS & PARHELIIS.

DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE. 73

HYPOTHESES. 75



FINIS.





